УДК 517.977

Д.ф.-м.н, професор Капустян В.О., к.т.н., доцент Россошинський Д.О., студент Пишнограєв І.О.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ЗАДАЧА З МІНІМАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Abstract

Volodymyr Kapustyan, prof., PhD; Dmytro Rossoshynsky, assoc. prof., PhD; Ivan Pyshnograiev, student

The problem with minimum energy for parabolic-hyperbolic equation s with nonlocal boundary condition

This paper concerns the solution of the optimal control problem for parabolic-hyperbolic equations. The solution of homogeneous parabolic-hyperbolic equations is studied. The classical solutions of the optimal control problem for parabolic-hyperbolic equations (inhomogeneous) is constructed in the form of the sum of biorthogonal series. Also, convergence of the obtained solution is proved.

Вступ

Одним з важливих розділів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є теорія крайових задач для рівнянь змішаного типу. Відзначимо, що дані задачі для рівнянь параболо-гіперболічного типу вивчались багатьма авторами. В [1], наприклад, була розглянута задача про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем, при цьому в каналі рух описувався хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії.

Задача оптимального керування для параболо-гіперболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами раніше не розглядалась. Але, наприклад, для параболічних рівнянь побудоване оптимальне керування в роботі [2]. В даній доповіді знайдені та обґрунтовані розв’язки задач оптимального керування з мінімальною енергією для гіперболо-параболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами.

Постановка задачі

Нехай функція $y(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}(D_+)$ задовольняє в D рівнянню

$$L\, y(x,t) = u(x,t) \tag{1}$$

початковим

$$y(x,-\alpha) = \varphi(x) \tag{2}$$

і граничним умовам

$$y(0,t) = 0,\ y'(0,t) = y'(1,t),\ -\alpha \le t \le T, \tag{3}$$

де

$D = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \le, \alpha, T > 0\}$,

$D_- = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t \le 0\}$, $D_+ = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ 0 < t \le T\}$,

$$L\, y = \begin{cases} y_t - y_{xx}, & t > 0, \\ y_{tt} - y_{xx}, & t < 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти керування $u^*(x,t)$, гладке по x і кусково неперервне по t, що переводить систему ((1)-(3)) в стан

$$y(x,T) = \psi(x) \tag{4}$$

і мінімізує функціонал

$$I(u) = \int_{-\alpha}^{T} \| u \|_D^2\ (t)\, dt, \tag{5}$$

де $\psi(x), \varphi(x)$ - фіксовані функції.

Ров'язання крайової задачі

В роботі [3] задача ((1)-(3)) розглянута у випадку $u(x,t) \equiv 0$.

В роботі [4] побудована система власних і приєднаних функцій $W_0 = \{X_j(x),\ j = 0,1,\ldots\}$,елементи якої мають формат:

$$X_{2k-1}(x) = x\cos(2\pi kx),\ X_{2k}(x) = \sin(2\pi kx),$$
$$k = 1,2,\ldots,\ X_0(x) = x. \tag{6}$$

Для системи функцій W_0 існує білртогональна до неї система функцій $R_0 = \{Y_i(x), i = 0,1,\ldots\}$,елементи якої мають формат:

$$Y_{2k-1}(x) = 4\cos(2\pi kx), Y_{2k}(x) = 4\,(1-x)\times$$
$$\times \sin(2\pi kx), k = 1,2,\ldots,_0(x) = 2. \tag{7}$$

Системи W_0, R_0 утворюють базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$.

Розв'язок крайової задачі представлений формулою:

$$y(x,t) = X_0(x)\, y_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (X_{2k-1}(x)\, y_{2k-1}(t) + X_{2k}(x)\, y_{2k}(t)), \qquad (8)$$

де функції $y_i(t)$ визначаються як розв'язки задач Коші

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = u_0(t), t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_0(t)}{dt^2} = u_0(t), t < 0,$$

$$y_0(-\alpha) = \varphi_0; \qquad (9)$$

$$\frac{dy_{2k-1}(t)}{dt} + \lambda_k^2\ y_{2k-1}(t) = u_{2k-1}, t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k-1}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2{}_{2k-1}(t) = u_{2k-1}(t), t < 0,$$

$$y_{2k-1}(-\alpha) = \varphi_{2k-1},\ \lambda_k = 2k\pi, \qquad (10)$$

$$\frac{dy_{2k}(t)}{dt} + \lambda_k^2\ y_{2k}(t) = -2\,\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + u_{2k}(t), t > 0,$$

$$\frac{d^2 y_{2k}(t)}{dt^2} + \lambda_k^2\ y_{2k}(t) = -2\,\lambda_k\ y_{2k-1}(t) + u_{2k}(t), t < 0,$$

$$y_{2k}(-\alpha) = \varphi_{2k},\ k = 1,2,..., \qquad (11)$$

де $\{\varphi_k\}$ є представленням функції $\varphi(x)$ по базису Рісса.

Побудова розподіленого керування

По аналогії до [2] керування задається вектором $(\bar{u}_k^*(t))' = (u_{2k-1}^*(t), u_{2k}^*(t))$ виду

$$\bar{u}_k^*(t) = \sum_{j=1}^{2} H_k^{(j)}(t)\, \beta_{k,j}, \qquad (12)$$

де числа $\beta_{k,j}$ визначаються з системи

$$\sum_{j=1}^{2} [H_k^{(i)}, H_k^{(j)}]\, \beta_{k,j} = \bar{\mu}_{k,i},\ i = \overline{1,2}, \qquad (13)$$

а [ ] - скалярний добуток в гільбертовому просторі $L_2^2(-\alpha,T) = L_2(-\alpha,T) \times L_2(-\alpha,T)$; і

$$K_{2k-1,1}(t) = K_{2k,2}(t) = \begin{cases} -\delta_k^{-1}(\alpha)\exp(-\lambda_k^2\ T)\,\lambda_k^{-1}\sin(\lambda_k\ (\alpha+t)), & t < 0, \\ \exp(-\lambda_k^2\ (T-t)), & t > 0; \end{cases}$$

$$K_{2k-1,2}(t) = \exp(-\lambda_k^2 T)\delta_k^{-1}(\alpha)\,(\frac{\cos\lambda_k\alpha\,\sin\lambda_k t}{\lambda_k^2} - \frac{t\cos\lambda_k(t+\alpha)}{\lambda_k}) +$$

$$+2\exp(-\lambda_k^2 T)\,\delta_k^{-2}(\alpha)\left(\frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}+T\delta_k(\alpha)\right)\sin\lambda_k(t+\alpha)+$$

$$+\exp(-\lambda_k^2 T)\,\delta_k^{-2}(\alpha)\left(\alpha-\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k}\right)\left(\sin\lambda_k t-\frac{\cos\lambda_k t}{\lambda_k}\right),\ t<0,$$

$$K_{2k-1,2}(t)=-2\,\lambda_k\,(T-t)\exp(-\lambda_k^2(T-t)),\ t>0.$$

$$\mu_{2k-1}=\psi_{2k-1}-\delta_k^{-1}(\alpha)\exp(-\lambda_k^2\,T)\left(\frac{\sin(\lambda_k\alpha)}{\lambda_k}u_{2k-1}^{+}(0)+\varphi_{2k-1}\right),$$

$$\mu_{2k}=\psi_{2k}-\frac{\exp(-\lambda_k^2 T)\delta_k^{-1}(\alpha)\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}\overset{+}{\underset{2k}{}}(0)-\exp(-\lambda_k^2 T)\delta_k^{-1}(\alpha)\,\varphi_{2k}+$$

$$+\frac{\exp(-\lambda_k^2 T)\delta_k^{-2}(\alpha)}{\lambda_k}\left(2\sin^2\lambda_k\alpha+2\,\lambda_k\,T\,\delta_k(\alpha)\sin\lambda_k\alpha-\alpha+\frac{\sin 2\lambda_k\alpha}{2\lambda_k}\right)\times$$

$$\times u_{2k-1}^{+}(0)+\exp(-\lambda_k^2 T)\delta_k^{-2}(\alpha)\,(\sin\lambda_k\alpha+2\lambda_k\,T\,\delta_k(\alpha)+\alpha\,(\lambda_k\cos\lambda_k\alpha-$$

$$-\sin\lambda_k\alpha))\,\varphi_{2k-1}.$$

Висновки

В результаті роботи була розв’язана крайова задача для неоднорідних параболо-гіперболічних рівнянь з нелокальними крайовими умовами. Визначено умови існування і єдності розв’язку.

На основі розв’язку крайової задачі було сформоване розподілене оптимальне керування, розглянута точка розриву і обраховане значення функції керування в ній, а також розв’язок задачі досліджено на збіжність.

Література

1. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. – 1959. – Т.14. - №3. – С. 3-19.
2. *Капустян* В. Е., *Лазаренко* И. С. Задачи с минимальной энергией для параболических уравнений с нелокальными краевыми условиями. - Вісник Дніпропетровського університету, 2009, т.17, N 8. Серія: моделювання, вип. 1, с. 47 - 60.
3. *Сабитов* К. Б. Краевая задача для уравнений параболо-гиперболического типа с нелокальными краевыми условиями. - Дифференциальные уравнения, 2010, т.46, N 10, с. 1468 - 1478.
4. *Ионкин* Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. - Дифференциальные уравнения, 1977, т.13, N 2, с. 294 - 304.