

УДК 519.688

К.т.н., доцент Зорін Ю.М., студент Кучук О.М.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

АЛГОРИТМ МУРАШИНОЇ КОЛОНІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ СТІЙКОГО РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФУ

Abstract

Yuri Zorin, assoc. prof., PhD; Oleksii Kuchuk, student

An ant colony optimization algorithm for the robust graph colouring problem

This paper presents an ant colony optimization (ACO) heuristic based algorithm for the robust graph colouring problem (RGCP). It defines a construction graph that allows applying of the ACO to the RGCP. Algorithm has been tested and compared with already known heuristic algorithms that solve RGCP.

Вступ

Задача стійкого розфарбування графу (англ. Robust Graph Colouring Problem) є NP-складною задачею комбінаторної оптимізації. Розв'язувати цю задачу доцільно за допомогою метаевристичних алгоритмів. Відомі успішні застосування алгоритмів відпалу, гібридного генетичного алгоритму, табу-пошуку, та ін. Вже є відомим застосування алгоритму, що має назву алгоритму мурашиної колонії [1], але в його основі не лежить метод, описаний у [2]. Метою роботи є розробка способу побудови конструкційного графу, що робить можливим застосування алгоритму мурашиної колонії до задачі стійкого розфарбування графу.

Постановка задачі

Нехай заданий граф $G(E, V)$, де V – множина вершин, E – множина ребер. $|V|=m$, $|E|=n$. Нехай E_u – множина ребер графу $G_u=\{V, E_u\}$, де G_u – повний граф, побудований на тій самій множині вершин, що і граф G . Тоді граф $G_c=\{V, E_c\}$, де $E_c=E_u \setminus E$, – компліментарний граф до графу G . За умовою задачі для кожного ребра $e_{ci} \in E_c$ задана ймовірність його появи $p(e_{ci})$.

Застосуємо розфарбування C^K до графу G . Розглянемо підмножину ребер $E_c^* \subseteq E_c$, $|E_c^*|=l$, до якої входять ті ребра компліментарного графу, що з'єднують вершини пофарбовані у однаковий колір. Тоді жорсткість розфарбування C^K (rigidity) визначається як:

$$R(G, C^K) = \sum_{i=1}^l p(e_{ci}^*). \quad (1)$$

Задача стійкого розфарбування графу полягає у знаходженні такого розфарбування C^K графу G , що не містить конфлікти, і (1) є мінімальним.

Алгоритм мурашиної колонії

Алгоритм мурашиної колонії був запропонований Марко Доріго у 1992 році [2]. В ідеї алгоритму лежить здатність колонії мурах знаходити найкоротший шлях між гніздом та джерелом їжі. Кожна мураха залишає за собою слід секрету (феромонів) і, пересуваючись у просторі, намагається дотримуватись стежок з феромонів, що були залишені іншими мурахами. Чим більше мурах пройде однією стежкою, тим більше феромонів накопичується на стежці, і тим більша ймовірність, що мураха обере саме цю стежку.

Алгоритм має стохастичну природу, що дозволяє йому уникати локальних мінімумів. Кожну стежку феромонів можна представити у вигляді ребра графу, що має назву конструкційного. Кожне ребро має свою вагу – час її проходження. Мурахи мають знайти на конструкційному графі найкоротший шлях між вершиною-гніздом та вершиною-їжею. На стежках, що належать до найкоротшого шляху, рівень феромонів буде накопичуватись швидше, адже за однаковий час мураха більше разів зможе пройти по коротшій стежці. Розробка будь-якого алгоритму мурашиної колонії починається з визначення будови конструкційного графу.

Будова конструкційного графу

Нехай за умовою задано граф G , який має n вершин. Тоді існує деякий довільний порядок обходу всіх вершин графу, за умови, що кожна вершина буде обрана тільки один раз. При цьому, перехід між вершинами має супроводжуватись вибором кольору, у який вона буде пофарбована. Побудуємо новий граф G_b , який матиме $n \cdot K$ вершин (рис. 1). Саме він і буде виконувати роль конструкційного графу, де K – кількість кольорів

розфарбування C^K . Граф G_b складається з n горизонтальних рівнів по K вершин у кожному. Мураха має пройти всі рівні від 1-го до n -го, обираючи на кожному рівні тільки одну вершину. Горизонтальний рівень з індексом i відповідає i -й вершині обходу вихідного графу. Довільна i -а вершина може бути пофарбована у будь-який з K кольорів.

Нехай до графу G застосоване розфарбування C^K таке, що вершина i пофарбована у колір j , а вершина $(i+1)$ - у колір k . Це рівносильно наявності ребра між вершинами (i,j) та $(i+1,k)$ у маршруті мурахи, що знайшла розфарбування C^K на конструкційному графі. Вага цього ребра визначається за формулою (1), але розглядаються тільки ті ребра, що виходять з вершини $(i+1)$ вихідного графу. Конструкційний граф дозволяє виконати всі можливі розфарбування графу, в тому числі й ті, що містять конфлікти. Найкоротший шлях між однією з вершин 1-го рівня та однією з вершин n -го рівня відповідатиме оптимальному розфарбуванню. Час проходження всього шляху мурахи дорівнює $R(G, C^K)$.

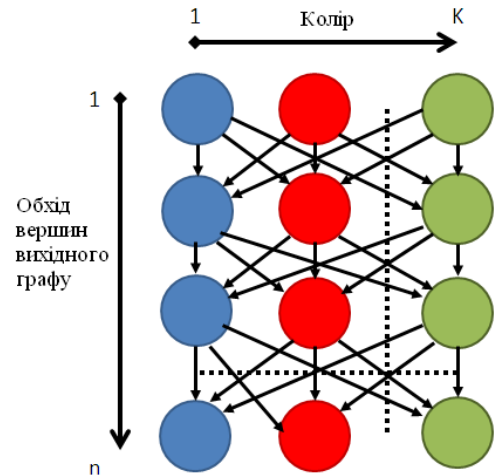


Рис.1. Будова конструкційного графу

Вибір ребер конструкційного графу та оновлення рівня феромонів

Ймовірність переходу i -ї мурахи з вершини j у вершину k визначається формулою:

$$p_{jk}^i = \frac{\tau_{jk}}{\sum_l \tau_{jl}}, \quad (2)$$

де τ_{jk} – рівень феромонів на ребрі jk , $\sum_l \tau_{jl}$ – сума рівнів феромонів усіх доступних для вибору ребер.

При проходженні мурахою ребра конструкційного графу, рівень феромонів на ребрі зростає на величину обернено пропорційну часу проходження цього ребра.

Рівень феромонів на всіх ребрах з кожною ітерацією зменшується на величину, що визначається як відношення коефіцієнту випаровування, що визначається емпіричним шляхом, до довжини відповідного ребра конструкційного графу.

Експериментальні результати

Алгоритм був протестований на такому ж наборі графів, що і у [3]. Кожен граф генерується випадковим чином: щільність ребер – 0,5, розподіл ймовірностей появи ребер компліментарного графу – рівномірний. Результати наведені у табл. 1, де n – кількість вершин вихідного графу, K – кількість кольорів розфарбування, R_{kc} , t_{kc} – досягнуте значення жорсткості та час виконання алгоритму [3], R_{aco} , t_{aco} – досягнуте значення жорсткості та час виконання запропонованого алгоритму мурашиної колонії.

Висновки

Алгоритм ефективно розв’язує задачі з графами розміром до 50 вершин включно. Оскільки на графах більшого розміру відомі алгоритми демонструють кращі результати, подальші дослідження передбачають оптимізацію розрахунку ваг ребер конструкційного графу і визначення оптимальних значень співвідношення евристичної та феромонної складових ймовірності переходу мурахи до наступної вершини конструкційного графу і коефіцієнту випаровування.

Таблиця 1. Тестування алгоритму

n	K	R_{kc}	t_{kc}, c	R_{aco}	t_{aco}, c
10	4	2,96	→ 0	0,3043	→ 0
10	5	1,54	0,02	1,0311	→ 0
15	5	6,62	0,01	3,0511	→ 0
15	6	3,99	0,01	2,1855	→ 0
20	5	14,22	0,01	5,3183	→ 0
20	8	3,81	0,02	2,3866	→ 0
20	10	1,46	0,06	1,2463	0,016
50	18	7,28	0,37	5,9657	0,704
100	35	10,87	1,04	18,99	9,063
100	50	1,55	0,45	11,3403	9,453
200	70	44,27	9,57	61,2119	9,391

Література

1. A. L. Laureano-Cruces et al., “An ant colony algorithm for the robust coloring problem”, ICGST AIML-11, Dubai, Apr. 2011.
2. M. Dorigo and T. Stutzle, Ant Colony Optimization. London : MIT Press, 2004.
3. S. Guo et al. “A New Neighborhood Based on Improvement Graph for Robust Graph Coloring Problem”, AI 2004, LNAI 3339, pp. 636-645, 2004.