УДК 638.322

К.т.н., доцент Тесленко О.К., магістрант Лавський О.М.

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

РЕАЛІЗАЦІЯ ГРУПОВИХ ОПЕРАЦІЙ НА РЕГУЛЯРНІЙ ДВОНАПРАВЛЕНІЙ ЛОГІЧНІЙ МЕРЕЖІ ЛІНІЙНОЇ СКЛАДНОСТІ

Abstract

Alexander K. Teslenko, assoc. prof., PhD; Oleh N. Lavskyy, student
Implementing of the group operations on a regular bilateral logic network

This paper describes the procedure for the study of the logical network in order to find the group operations that can be realized. Using the found operations allows the increase in the computing speed in various algorithms. The results for the bilateral one-dimensional network are set out.

Вступ

З розвитком технології ПЛІС, особливо ПЛІС FPGA, значно зросли можливості практичного використання логічних мереж (ЛМ) для реалізації функціональних перетворень. Особливо велика перспектива має місце для спеціалізованих обчислень, оскільки витрати, необхідні для створення дослідних зразків чи дослідних партій пристроїв, є незначними.

Функціональні можливості ЛМ загальної структури, а також деяких конкретних структур ЛМ досліджувались в [1-5]. На даний час відсутні методи оптимальної (в заданих критеріях) реалізації на ЛМ довільних функціональних перетворень. Загальний напрямок досліджень полягає в визначені можливостей реалізації на ЛМ з наперед заданою типовою структурою вибраних функціональних перетворень [4,5].

Постановка задачі

Задача полягає у визначенні групових операцій довільної розрядності, які реалізуються на регулярній логічній мережі лінійної складності (рис. 1) з двонаправленими одинарними боковими зв’язками (ДЛМ) між елементами (конструктивними модулями – КМ).

Логічна мережа є системою пов’язаних між собою універсальних логічних комірок з одним виходом, а групові операції - це асоціативні операцій, для яких існує однозначно визначені обернені. Основні відомості з теорії груп можна знайти в [6], з теорії ЛМ – в [1].

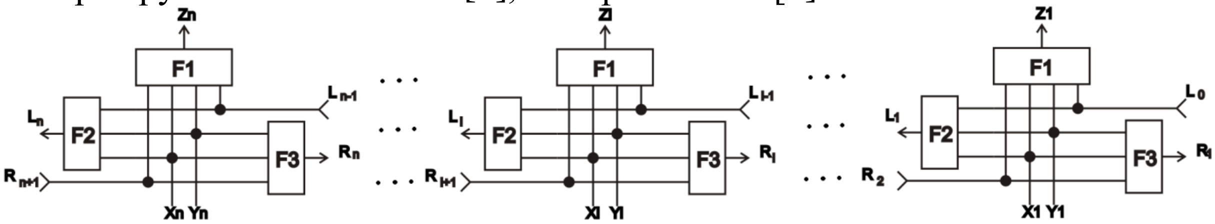

Рис.1. Структура ДЛМ

Методика

Дослідження ґрунтується на поєднанні експериментів по моделюванню ЛМ та теоретичного аналізу. Попередній аналіз дозволяє скоротити простір визначеності КМ в ЛМ, що зменшить перебір.

Розв'язання

Функцію F_1 можна представити у вигляді чотирьох таблиць Келі розміром 2x2, кожна з яких задає F_1 для відповідної пари значень бокових зв'язків L та R (позначатимемо ці таблиці $T^{R,L}$).

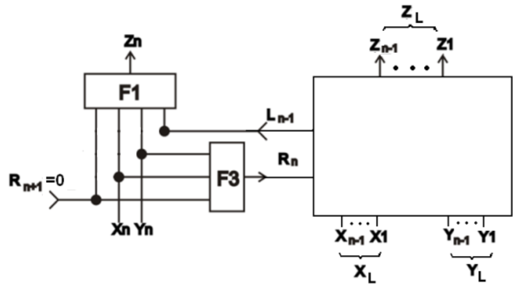

Рис. 2. Старший розряд ЛМ

Розглянемо окремо старші розряди ДЛМ (рис.2). Через X_L, Y_L, Z_L позначено кортежі молодших розрядів. Запишемо таблицю Келі для деякого стану ЛМ у вигляді табл.1, але заноситимемо в неї лише старші розряди результату. Тоді така таблиця буде складатися із сукупності таблиць двох видів: $T^{0,0}$ та $T^{0,1}$ (виділено розташування). Хоча б одна з них повинна мати вигляд табл.2, де через e позначено старший розряд нейтрального елемента групи. Це випливає з визначення нейтрального елемента. На місці зірочки може бути або e або $\bar{e}$. Спочатку розглянемо перший варіант. Отже, нехай $T^{0,L}$ має вигляд табл.3.

Таблиця 1.

	eY_L^0	$\bar{e}Y_L^0$	eY_L^1	$\bar{e}Y_L^1$	eY_L^1	…
eX_L^0		$T^{0,L}$		$T^{0,L}$		…
$\bar{e}X_L^0$						…
eX_L^1		$T^{0,L}$		$T^{0,L}$		…
$\bar{e}X_L^1$						…
eX_L^1						…
…	…	…	…	…	…	…

Повернемося до табл.1. Якби в неї записували всі розряди результатів, а не лише старші, то для групової операції мали б отримати латинський квадрат, тобто в кожному рядку та кожному стовпчику містились би всі числа від 0 до 2^n-1. Звідси зрозуміло, що в кожному рядку і стовпчику табл.1 міститься однакова кількість нулів і одиниць. Тоді $T^{0,\bar{L}}$ або співпадає з $T^{0,L}$ або має вигляд табл.4, бо в інших випадках в деякому рядку чи стовпчику буде різна кількість елементів e та $\bar{e}$.

Таблиця 2.

	e	$\bar{e}$
e	e	$\bar{e}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	*

Таблиця 3.

	e	$\bar{e}$
e	e	$\bar{e}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	e

Таблиця 4.

	e	$\bar{e}$
e	$\bar{e}$	e
$\bar{e}$	e	$\bar{e}$

Таблиця 5.

	e	$\bar{e}$
e	e	$\bar{e}$
$\bar{e}$	$\bar{e}$	$\bar{e}$

Таблиця 6.

	e	$\bar{e}$
e	$\bar{e}$	e
$\bar{e}$	e	e

З попереднього випливає, що $F_1(0,x,y,L) = x \oplus y \oplus f_1(L)$ **(1)**

Аналогічно розглядаючи молодший розряд встановлюємо, що

$F_1(R,x,y,0) = x \oplus y \oplus f_2(R)$ **(2)**

Тепер виділимо деякий і-ий середній розряд (рис. 3).

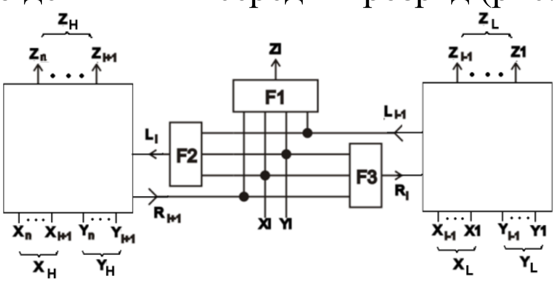

Рис. 3. Середній розряд ЛМ

Таблиця 7.

	$Y_H^0 e Y_L^0$	$Y_H^0 \bar{e} Y_L^0$	…	$Y_H^c e Y_L^d$	$Y_H^c \bar{e} Y_L^d$	…
$X_H^0 e X_L^0$		$T^{R,L}$	…		$T^{R,L}$	…
$X_H^0 \bar{e} X_L^0$			…			…
…	…	…	…	…	…	…
$X_H^a e X_L^b$		$T^{R,L}$	…		$T^{R,L}$	…
$X_H^a \bar{e} X_L^b$			…			…
…	…	…	…	…	…	…

Складемо таблицю Келі у вигляді табл.7, але записуватимемо в неї лише розряди результатів з номером *і*. Вона складається з таблиць $T^{0,0}$, $T^{0,1}$, $T^{1,0}$,$T^{1,1}$, причому вже встановлено, що перші три мають вигляд табл.3 або табл.4. З умови однаковості кількостей нулів та одиниць в рядках та стовпчиках з'ясовуємо, що $T^{1,1}$ також може мати лише вигляд табл.3 або табл.4. Тому $F_1(1,x,y,1)=x\oplus y\oplus c(c=0{,}1)$ **(3)**

З (1), (2) та (3) отримуємо: $F_1(R,x,y,L)=x\oplus y\oplus f_3(R,L)$.

Тепер повернемося до варіанту, коли замість зірочки буде $\overline{e}$. Проводячи аналіз, ана-логічний попередньому, прихо-димо до висновку, що $T^{R,L}$ мо-жуть бути лише вигляду табл.5 або табл.6. Звідси маємо наступі випадки: $F_1(R,x,y,L)=(x\,\&\,y)\oplus f_3(R,L)$ або $F_1(R,x,y,L)=(x\vee y)\oplus f_3(R,L)$. При цьому табл.5 та табл.6 мають зустрічатись в табл.7 однаково часто (інакше не виконується умова латинського квадрату). Тому $F_2(0,x,y)$, $F_2(1,x,y)$, $F_3(0,x,y)$, $F_3(1,x,y)$ повинні мати ранг 2 і для невироджених випадків маємо:

$$F_2(L,x,y)=x\oplus y\oplus L\oplus c_2(c_2=0{,}1)$$

$$F_3(R,x,y)=x\oplus y\oplus R\oplus c_3(c_3=0{,}1).$$

Перевірка показує, що в цих випадках операції не можуть бути груповими. Подальший аналіз показує, що одна з бокових функцій, нехай F_2, має один з трьох виглядів: $F_2(0,x,y)=0$ або $F_2(L,x,y)=\overline{L}$, або $F_2=const$.

Для функції F_3 було визначено наступні варіанти: *const*, $\overline{R}$, $R\#x\#y$ (# - мажоритарна функція), xy, $x\vee y$, $\overline{R}(x\vee y)\vee Rxy$, $\overline{R}(x\vee y)\vee R\overline{x\vee y}$, $\overline{R}xy\vee R\overline{xy}$, а також інверсії вказаних. Поєднуючи всі зазначені раніше варіанти для F_1, F_2 та F_3, при довільній розрядності, більшій чотирьох, отримуємо 86 різних групових операцій, кожна з яких відноситься до класу комутативних. Всі ці варіанти були проаналізовані і перевірені, для кожної за індукцією легко довести її групові властивості для будь-якої розрядності *n*. Наведемо один з цікавих випадків:

$$z_i=x_i\oplus y_i\oplus L_i,\ L_i=\overline{x_i\#y_i\#L_{i-1}}\ ,\ i=1..n.$$

Ця операція (позначимо її « * ») схожа на звичайну операцію додавання, але розряди переносів інвертується. Нехай X^n = $<x_1,x_2,\dots,x_n>$ і позначимо через $W(X^n)$ кортеж, отриманий з X^n інверсією біт з парними номерами, тоді можна показати, що $W(X^n)*W(Y^n)=W(X^n+Y^n)$. А оскільки $W(W(X^n))=X^n$, то « * » та « + » - ізоморфні.

Результати

Для перевірки того, які саме комбінації з визначених функцій F_1, F_2 та F_3 реалізують групові операції було розроблено програмний інструментарій. В табл.8 наведені результати для кількостей різних операцій, отримані комп'ютерним моделюванням ДЛМ. В третьому рядку для порівняння наведено загальну кількість різних груп порядків 2^n з точністю до ізоморфізму, де *n* – розрядність операцій. Для додаткової перевірки було виконано повний перебір всіх варіантів функцій, включаючи вироджені, а також промодельовано більш простий випадок односторонньої ЛМ, для якої було знайдено 16 різних операцій.

Таблиця 8.

Остаточні результати

Порядок групи (2^n)	2^1=2	2^2=4	2^3=8	2^4=16	2^5=32	2^6=64	2^7=128
Реалізується ДЛМ	2	12	92	114	86	86	86
Всього неізорфних	1	2	5	14	51	267	2328

Зауважимо, що у випадку, коли $F_1(R,x,y,L) = x \oplus y \oplus L;\ F_2(L,x,y) = Lx \vee Ly \vee xy;\ F_3 \equiv const$, можна отримати (розірвавши декілька бокових зв'язків між КМ) деякий декартовий добуток груп цілих чисел $\square_{2^{n_i}}$ з операцією додавання по модулю 2^{n_i} . Тоді на основі теореми про класифікацію скінченних абелевих груп [6], встановлюємо, що ДЛМ з можливістю розірвання зв'язків реалізує з точністю до ізоморфізму всі абелеві групи порядків 2^n.

Висновки

Запропонований табличний метод дозволив легко і наочно проаналізувати ДЛМ та встановити необхідні умови для реалізації групових операцій. Метод доцільно узагальнити для аналізу інших типів ЛМ.

За допомогою аналітичних досліджень реалізації на ДЛМ латинських квадратів з нейтральним елементом досягнута можливість значного скорочення можливих варіантів структур КМ. Аналіз на асоціативність є набагато складнішою задачею. Завдяки значному скороченню варіантів структур КМ виникла практична можливість для експериментального визначення властивості асоціативності.

Аналітичним та експериментальним шляхом визначена можливість реалізації на ДЛМ 86 групових операцій порядку 2^n при будь яких значеннях n>4. Кожна з цих операцій ізоморфна деякому прямому добутку циклічних груп, причому 16 з них можна реалізувати однонаправленою ЛМ.

Одержані результати є основою для подальших досліджень в напрямку ускладнення структури ЛМ, наприклад збільшенням числа зв'язків між КМ та їх розрядності, внесенням нерегулярності. Також варто виконати синтез всіх скінчених груп малого порядку для визначення спільності в структурах ЛМ, які можуть їх реалізувати.

Література

1. *Варшавский В.И., Мараховский В.Б.* Однородные структуры М. Энергия, 1973 – 152 с
2. *Peter Clote,* Evangelos Kranakis Boolean functions and computation models, Springer, 2001 – 611 с.
3. *Hennie F.S.* Analysis of bilateral iterative networks. IRE Trans., CT-6, March 1959
4. *Палагин А.В., Опанасенко В.Н., Чигирик Л.Г.* Структурная организация адаптивных логических сетей на ПЛИС//УсиМ –1992-№7/8 с.18-25
5. *Палагин А.В., Опанасенко В.Н., Чигирик Л.Г.* К синтезу адаптивных структур на ПЛИС//УсиМ –1993-№5 с.12-27.
6. *Курош А.Г.* Теория групп – Москва: «НАУКА», 1967. — 711 с.