

УДК 519.713

Д.т.н., проф. Кузьменко Б. В., аспірант Ткаченко П. Г.,
к.т.н., с.н.с. Топал О. І.

Інститут вугільних енерготехнологій НАН України

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕРУХОМИХ ТОЧОК ЗАДАЧІ
ТЕПЛОВОГО САМОЗАЙМАННЯ ПИЛОВУГІЛЬНИХ
СУМІШЕЙ

Abstract

*Boris V. Kuzmenko, prof., Dr.; Pavlo G. Tkachenko, postgraduate;
Olexandr I. Topal, PhD.*

The research of stability of fixed points of coal mixtures' spontaneous self-ignition problem

In this paper the research of stability of fixed points of coal mixtures' spontaneous self-ignition problem is presented. Analytical search of fixed points has been made. Then the type of these points was studied. In conclusion, the phase trajectories of the problem are given.

Вступ

Теорія самозаймання має важливе значення для численних задач теорії горіння, забезпечення вибухобезпечних умов роботи топкових пристроїв та системи пилоприготування твердого палива, а також для розробки способів оцінки реакційних властивостей палив [1]. Аналіз математичних моделей, в тому числі з точки зору дослідження їх нерухомих точок та фазових портретів, є важливим етапом в даній теорії.

Постановка задачі

Математична модель процесу самозаймання в безрозмірному вигляді в сукупності буде мати наступний вигляд [2]:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = C\mu \frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} - \Omega(\theta - \theta_1) - \sigma(\theta^4 - \theta_1^4) \\ \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{\theta_{ad}} C\mu \frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} \\ \mu = 1 - \alpha(1 - C) \end{cases}, \quad (1)$$

де θ - безрозмірна температура; C – безрозмірна поточна концентрація кисню; μ - безрозмірна поточна концентрація вугільного пилу; x – безрозмірна геометрична координата. Ω - безрозмірний коефіцієнт тепловіддачі; σ - безрозмірний коефіцієнт теплового випромінювання; θ_{ad} - безрозмірна адіабатна температура пилу повітряної суміші за умови початкової температури 0 С; α - коефіцієнт надлишку повітря.

Початкові умови для системи нелінійних диференціальних рівнянь (1) мають вигляд $x=0$, $\theta=\theta_1$, $C=1$, $\mu=1$.

Систему (1) можна звести до двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = C[1-\alpha(1-C)]\frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} - \Omega(\theta - \theta_1) - \sigma(\theta^4 - \theta_1^4) \\ \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{\theta_{ad}} C[1-\alpha(1-C)]\frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} \end{cases} \quad (2)$$

Основна частина

Для аналізу поведінки динамічної системи (2), дослідимо її асимптотичний розв'язок, тобто аттрактор. Явної залежності від геометричної координати невідомі функції не мають, отже система буде автономною, а залежність від параметрів буде гладкою.

На фазовій площині початкова умова визначається точкою. Дослідимо тепер систему так, щоб для практично всіх можливих (допустимих) початкових умов оцінити, яким буде поведінка невідомих функцій при $x \rightarrow \infty$.

Для даного дослідження необхідно знайти нерухомі точки системи (2) та визначити їх тип [3]. Щоб знайти ці нерухомі точки, достатньо прирівняти праві частини задачі Коші до нуля, тобто:

$$\begin{cases} C[1-\alpha(1-C)]\frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} - \Omega(\theta - \theta_1) - \sigma(\theta^4 - \theta_1^4) = 0 \\ -\frac{1}{\theta_{ad}} C[1-\alpha(1-C)]\frac{1}{\theta^2} e^{-1/\theta} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Використовуючи умову для другого рівняння системи (3) в першому рівнянні з (3), отримаємо рівняння для пошуку першої координати нерухомої точки на фазовій площині:

$$\Omega(\theta - \theta_1) + \sigma(\theta^4 - \theta_1^4) = 0 \quad (4)$$

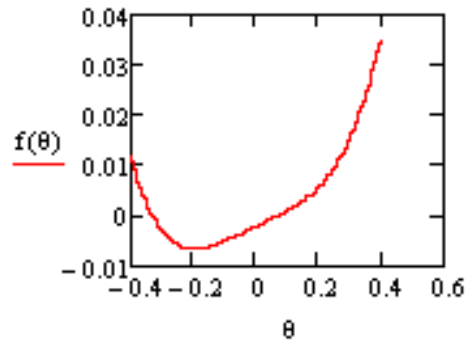


Рис 1. Графік рівняння (4)

Дане рівняння буде мати два дійсних корені. При чому один з них легко відшукується аналітично $\theta = \theta_1$. Інший корінь буде від'ємний. Це видно з графіка залежності лівої частини рівняння від параметра θ (рис 1.). Інші два корені рівняння (4) будуть комплексними, їх розглядати теж не будемо.

Окрім того, наявність лише одного додатного кореня (нас влаштовують с фізичної точки зору лише додатні температури) можна довести, якщо знайти екстремум функції (він єдиний) (4) і дослідити її монотонність справа від екстремуму.

Отже, маємо лише один корінь рівняння (4). Для C можливі 2 варіанти розв'язку другого рівняння системи (3), а саме:

$$\begin{cases} C = 0, & \alpha > 0 \\ C = \frac{\alpha - 1}{\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Відповідно будемо мати і дві нерухомі точки: $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \frac{\alpha - 1}{\alpha} \end{pmatrix}$ для всіх

допустимих α та для $\alpha > 1$ відповідно.

Далі необхідно дослідити тип знайдених нерухомих точок (тип їх стійкості). Робити це будемо в малому околі нерухомої точки, щоб можна було знехтувати квадратичними членами розкладу в Тейлорівському вигляді. Знайдемо якобіан початкової системи (2) в аналітичному вигляді:

$$J(\theta, C) = \begin{pmatrix} -\Omega - 4\sigma\theta^3 + (1 - \alpha + \alpha C) \frac{Ce^{-1/\theta} - 2Ce^{-1/\theta}\theta}{\theta^4} & \frac{e^{-1/\theta}(1 - \alpha + \alpha C) + \alpha Ce^{-1/\theta}}{\theta^2} \\ \frac{1}{\theta_{ad}} \left[(\alpha - 1 - \alpha C) \frac{Ce^{-1/\theta} - 2Ce^{-1/\theta}\theta}{\theta^4} \right] & \frac{e^{-1/\theta}(\alpha - 1 - \alpha C) + \alpha Ce^{-1/\theta}}{\theta_{ad} \cdot \theta^2} \end{pmatrix}$$

Тепер порахуємо Якобіан в нерухомих точках, знайдених раніше:

$$J(\theta_1, 0) = \begin{pmatrix} -\Omega - 4\sigma \cdot \theta_1^3 & \frac{(1-\alpha)e^{-1/\theta_1}}{\theta_1^2} \\ 0 & -\frac{1}{\theta_{ad}} \frac{(1-\alpha)e^{-1/\theta_1}}{\theta_1^2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$J\left(\theta_1, \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} -\Omega - 4\sigma \cdot \theta_1^3 & \frac{(\alpha-1)e^{-1/\theta_1}}{\theta_1^2} \\ 0 & -\frac{1}{\theta_{ad}} \frac{(\alpha-1)e^{-1/\theta_1}}{\theta_1^2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Далі необхідно визначити власні числа матриць (5) та (6). Але, так як піддіагональний елемент матриці = 0, то діагональні числа і будуть власними значеннями відповідних матриць.

Для визначення типу нерухокої точки достатньо знати знаки власних чисел та факт їх дійсності чи комплексності [3]. В нашому випадку видно, що обидва власних числа для матриць (5) і (6) – дійсні, при чому обидва від’ємні (всі параметри моделі – додатні). Такому випадку відповідає тип нерухокої точки – стійкий вузол [3]. Проілюструємо отримані результати графічно (рис. 2, рис. 3), зобразивши фазову траєкторію системи (2):

- нерухома точка $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\theta_1 = 0.07 \quad \theta_{ad} = 2.3 \\ \Omega = 0.03 \quad \alpha = 0.1 \quad \sigma = 1$$

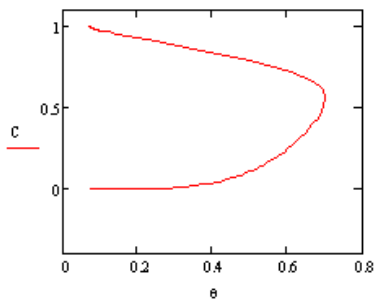


Рис 2. Фазова траєкторія системи (2)
Приклад 1.

- нерухома точка $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{pmatrix}$

$$\theta_1 = 0.07 \quad \theta_{ad} = 2.3 \\ \Omega = 0.03 \quad \alpha = 2 \quad \sigma = 1$$

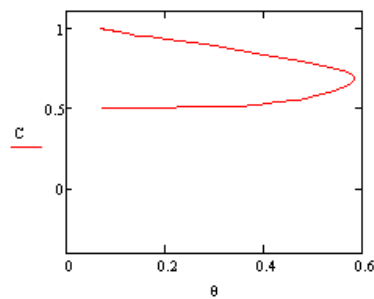


Рис 3. Фазова траєкторія системи (2)
Приклад 2.

Висновки

В статті було розглянуто питання стійкості нерухомих точок задачі теплового самозаймання пиловугільних сумішей. Були знайдені допустимі

нерухомі точки в аналітичному вигляді, досліджені їх стійкість та тип. На основі отриманих результатів, побудовані фазові траєкторії системи.

В подальшому результати досліджень можуть бути використані для аналізу процесу самозаймання та для побудови більш комплексних моделей запалення та горіння пиловугільних сумішей.

Література

1. *Кузьменко Б. В., Мальчевський І. А.* Теплове самозаймання пиловугільних сумішей. К.: «Наукова думка» НАН України, 2011. – 280 с.
2. *Хзмалян Д. М.* Теория топочных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990. – 352 с.
3. *Кирьянов Д. В., Кирьянова Е. Н.* Вычислительная физика – М.: Полибук Мультимедиа, 2006. – 352 с.: ил.
4. *Кирьянов Д. В.* Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.