УДК 621.38

К.т.н., Боярінова Ю.Є., студент Бобир Є.О.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ЗМЕНШЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНОЇ ЧУТЛИВОСТІ ЦИФРОВОГО ФІЛЬТРА З КВАДРИПЛЕКСНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Abstract

Yulia Y. Boyarinova, PhD; Yevgeniy Bobyr, student

Reduction of parametric sensitivity digital filter with quadriplex coefficients

This article proposes an approach which is to reduce the total parametric sensitivity of the amplitude-frequency characteristics of digital filters with hypercomplex coefficients in the frequency range, the study of general properties of the parametric sensitivity of these filters and features of their construction.

Вступ

Цифрова фільтрація є одним з найбільш могутніх інструментальних засобів цифрової обробки інформації. Дослідження подання даних в цифрових фільтрах показали, що для цього можна використовувати не тільки дійсні коефіцієнти, а також більш складні системи – гіперкомплексні числові системи [1].

При проектуванні цифрових фільтрів, в яких коефіцієнти передавальних функцій подані певними гіперкомплексними числовими системами, важливо враховувати особливості такого подання даних. При автоматизованому проектуванні таких фільтрів необхідно враховувати можливість зменшення апаратних затрат на їх реалізацію завдяки ізоморфному переходу до менш заповнених систем.

Однією з основних властивостей частотного фільтра є його здатність зберігати робочі характеристики при відхиленні параметрів схемних елементів від розрахункових, що виникають у процесі виробництва та експлуатації фільтра. Проблема синтезу електричних ланцюгів з низькою параметричної чутливістю привертала увагу вчених і інженерів ще з початку XX-го століття. Тому дослідження параметричної чутливості модуля передавальної функції цифрового фільтра до її коефіцієнтів є важливою характеристикою фільтрів. Її величина істотно впливає на властивості фільтра, і чим вона менша, тим надійнішим буде фільтр.

Постановка задачі

Слід розробити підхід для зменшення інтегральної параметричної чутливості амплітудно-частотної характеристики цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами на заданій смузі частот, дослідити загальні властивості параметричної чутливості таких фільтрів з урахуванням особливостей їх побудови.

Базові відомості про параметричну чутливість

При несанкціонованому впливі зовнішнього середовища можливі коливання параметрів цифрових реверсивних фільтрів. Ці коливання впливають на передавальну функцію фільтра, що приводить до похибок в роботі фільтру. Тому якість фільтру характеризується функцією інтегральної чутливості, яка враховує вплив зовнішнього середовища на всі елементи схеми фільтра.

Чутливість деякої величини M до зміни параметра q (скорочено — чутливість M по q) в загальному випадку може визначатися так:

$$S_q^M = \frac{q}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial q}$$

По чутливості S_q^M можна судити, на скільки відсотків зміниться величина M, якщо параметр q зміниться на 1% [2]. Якщо параметром q будуть коефіцієнти передавальної функції цифрового фільтра, а величиною M модуль передавальної функції цифрового фільтра, то отримаємо параметричну чутливість АЧХ цифрового фільтра. Функція параметричної чутливості дозволяє провести аналіз впливу похибок коефіцієнтів передавальної функції на вихідний сигнал.

Для цифрового фільтра з дійсними коефіцієнтами a_i параметрична чутливість по одному коефіцієнту a_1 розраховується як $PS_{a_1} = \frac{a_1}{|H|} \cdot \frac{\partial |H|}{\partial a_1}$, а сумарна параметрична чутливість буде мати вигляд:

$$PS(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|H(\omega)|} \cdot \frac{\partial |H(\omega)|}{\partial a_i}, \tag{1}$$

де: n - порядок фільтра;

a_i - коефіцієнти фільтра;

$|H(\omega)|$- модуль передавальної функції на частоті ω;

$PS(\omega)$- значення параметричної чутливості фільтра.

Тобто параметрична чутливість цифрового фільтра представляє собою чутливість величини $|H(\omega)|$ до зміни коефіцієнтів передавальної функції фільтра.

Якщо коефіцієнти фільтра – дійсні числа, то функція інтегральної чутливості незмінна – тобто, якщо вона не задовольняє вимогам технології, то її поліпшити неможливо. Якщо ж коефіцієнти фільтра – гіперкомплексні числа, то функція інтегральної чутливості залежить від $m-1$-го параметра, і за їх допомогою можна оптимізувати якийсь критерій якості. Наприклад, інтеграл функції інтегральної чутливості в деякому частотному інтервалі, чи інший.

Вигляд остаточної формули для розрахунку параметричної чутливості цифрового фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами залежить від обраної ГЧС. Але в загальному випадку вигляд функцій чутливості по одному коефіцієнту для фільтра з дійсними і гіперкомплексними коефіцієнтами не відрізняється. Сумарна ж параметрична чутливість фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами буде мати вигляд $PS=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{|H|}\cdot\frac{\partial|H|}{\partial a_i}$, при цьому $n=l\cdot m$, де l – вимірність ГЧС, а m – число гіперкомплексних коефіцієнтів в передавальній функції цифрового фільтра H [3].

Підхід до зменшення параметричної чутливості з квадриплексними коефіцієнтами

Розглянемо цифровий фільтр 4-го порядку з дійсними коефіцієнтами з передавальною функцією:

$$H=\frac{-0.2576785+0.41760426z^{-1}-0.57248388z^{-2}+0.41760426z^{-3}-0.2576785z^{-4}}{1-0.00322709z^{-1}-0.71946051z^{-2}+0.12106509z^{-3}-0.0792995z^{-4}} \quad (2)$$

Використовуючи метод побудови передавальної функції з гіперкомплексними коефіцієнтами для цифрового фільтра 4-го порядку з дійсними коефіцієнтами можна побудувати відповідну передавальну функцію цифрового фільтра 1-го порядку з квадриплексними коефіцієнтами: $H=\frac{A+\frac{B}{z}}{1+\frac{C}{z}}$, де $A=-0.25767851\cdot e_1+0.11358319\cdot e_3$,

$B=0.39043641\cdot e_1+1.16738193\cdot e_2+0.35338518\cdot e_3-0.98076212\cdot e_4$,

$C=-0.00080677\cdot e_1-0.56395578\cdot e_2+0.23369819\cdot e_3-0.11372189\cdot e_4$.

Використовуючи таку передавальну функцію та метод, який наведений в [4], побудуємо передавальну функцію фільтра першого порядку з квадриплексними коефіцієнтами. Нехай побудована передавальна функція має близьку до найменшої сумарну параметричну чутливість на частоті $w = \pi$ всіх можливих передавальних функцій з квадриплексними коефіцієнтами, що реалізують передавальну функцію (2). Для цього потрібно розв'язати недовизначену систему, відносно 3-х вільних змінних.

Спочатку сформуємо для нашого прикладу та розв'яжемо систему (3).

$$\begin{cases} 4 \cdot k_1 = o \\ 2 \cdot k_3^2 + 2 \cdot k_2^2 - 2 \cdot k_4^2 + 6 \cdot k_1^2 = p \\ 4 \cdot k_1^3 + 4 \cdot k_1 \cdot k_2^2 + 8 \cdot k_4 \cdot k_3 \cdot k_2 - 4 \cdot k_4^2 \cdot k_1 + 4 \cdot k_3^2 \cdot k_1 = q \\ 2(k_3^2 \cdot k_1^2 - k_4^2 \cdot k_1^2 - k_3^2 \cdot k_2^2 + k_4^2 \cdot k_3^2 + k_1^2 \cdot k_2^2 - k_4^2 \cdot k_2^2) + 8 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 + k_1^4 + k_2^4 + k_3^4 + k_4^4 = r \end{cases} \quad (3)$$

В результаті отримаємо значення $k_1 = -0.00080678, k_2 = -0.56395578$, $k_3 = -0.23369819$, $k_4 = -0.11372189$. Також можемо розрахувати значення $g_1 = -0.11372189$. Другу недовизначену систему розв'яжемо відносно змінних g_2, g_3та g_4. В результаті отримаємо:

$$\begin{cases} h_1 = 0.41698059 + 0.11372189 \cdot g_4 + 0.56395578 \cdot g_2 - 0.23369819 \cdot g_3 \\ h_2 = 1.18029882 - 0.23369819 \cdot g_4 - 0.00080678 \cdot g_2 - 0.11372189 \cdot g_3 \\ h_3 = 0.3534768175 + 0.5639557839 \cdot g_4 - 0.1137218849 \cdot g_2 - 0.00080678 \cdot g_3 \\ h_4 = -0.5639557838 \cdot g_3 - 0.9167062216 + 0.2336981893 \cdot g_2 - 0.00080678 \cdot g_4 \end{cases}$$

Використовуючи ці вирази отримаємо функцію сумарної параметричної чутливості амплітудно-частотної характеристики даного цифрового фільтра з квадриплексними коефіцієнтами від коефіцієнтів g_2, g_3, g_4 та частоти w. Підставляючи у цю функцію значення $w = \pi$ визначимо коефіцієнти g_2, g_3, та g_4, при яких параметрична чутливість буде наближатися до свого мінімуму.

Для даного прикладу такими коефіцієнтами можуть бути $g_2 = 0$, $g_3 = 0.35$ та $g_4 = -0.55$. Тоді з (3) отримаємо $h_1 = 0.272639$, $h_2 = 1.26903017$, $h_3 = 0.04301877$ та$h_4 = -1.11364702$. Тобто маємо значення усіх компонентів квадриплексних коефіцієнтів передавальної функції:

$$H_H(z) = \frac{g + h \cdot z^{-1}}{e_1 + k \cdot z^{-1}}$$

що описує цифровий фільтр першого порядку з квадриплексними коефіцієнтами. Виконав розрахунок сумарної параметричної чутливості модуля такої передавальної функції, отримаємо графік, що наведений на рис. 1.

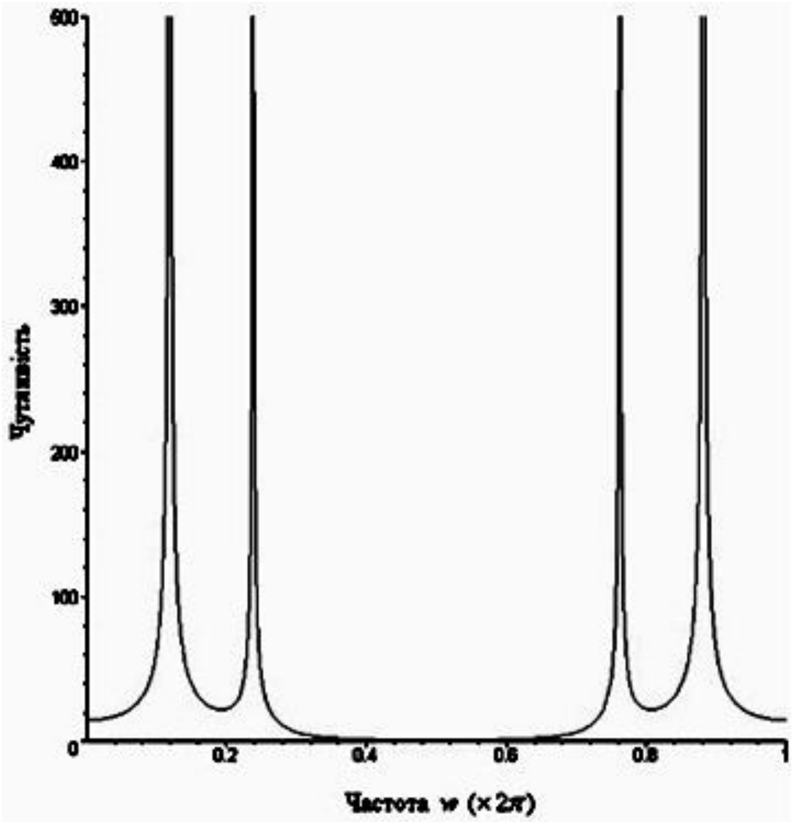

Рис. 1. Залежність сумарної параметричної чутливості АЧХ від частоти.

Для перевірки ефективності підходу до зменшення сумарної параметричної чутливості амплітудно-частотної характеристики на певній частоті на даному прикладі можна порівняти сумарну параметричну чутливість фільтра з квадриплексними коефіцієнтами з чутливістю фільтра-прототипу з дійсними коефіцієнтами до і після застосування підходу.

Висновки

Параметрична чутливість модуля передавально функції цифрового фільтра до її коефіцієнтів є важливою характеристикою фільтрів. Її величина істотно впливає на властивості фільтра, і чим вона менша, тим простішим для проектування буде фільтр.

Всі системи переходу від фільтра з дійсними коефіцієнтами до фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами мають спільну особливість. Одна з кожної пари систем є недовизначеною, тобто має безліч розв'язків. Для простоти розв'язання такої системи деякі коефіцієнти прирівнюються нулю.

Якщо ж вільні коефіцієнти не прирівнювати нулю, можемо отримати розв'язок системи відносно цих коефіцієнтів. Тобто, це дає можливість отримати фільтр, передавальна функція якого має додаткові параметри, які можуть використовуватися для підвищення ефективності роботи фільтра.

Зокрема, дані параметри можуть бути використані для зменшення сумарної параметричної чутливості АЧХ фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами [5], оскільки при розрахунку сумарної параметричної чутливості АЧХ, ці параметри (вільні змінні) увійдуть у функцію чутливості і будуть впливати на її величину. Тобто, змінні можна підібрати таким чином, щоб сумарна параметрична чутливість відповідала певним умовам, наприклад, була найменшою серед всіх можливих на певній частоті, або ж задовольняла більш складним умовам.

Література

1. *Синьков М.В.* Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения: монография / М.В. Синьков, Я.А. Калиновский, Ю.Е. Бояринова. — К. : Інфодрук, 2010. — 389 с. — ISBN 978-966-02-5677-4.
2. *Бизин А. Т.* Введение в цифровую обработку сигналов. — Новосибирск, 1998. — 66 с.
3. H. Toyoshima. Computationally Efficient Implementation of Hypercomplex Digital Filters/ H. Toyoshima// IEICE Trans. Fundamentals, E85-A, 8 — 2002—P.1870-1876.
4. *Каліновський Я.О.* Методи комп’ютерного моделювання та обчислень з використанням гіперкомплексних числових систем: Дис. ... доктора техн. наук: 01.05.02; Захищена 17.09.2007; Затв. 17.01.2008. — К., 2007. — 417 с.: іл. — Бібліогр.
5. *Федоренко О.В.* Цифрові фільтри з низькою параметричною чутливістю / О.В. Федоренко // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2008. – Т. 10, No2. – С. 87–94.