

УДК 314.1+519.2

К.т.н., доцент Чертов О.Р., студентка Савчук А.Б.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВІДТВОРЕННЯ НАСЕЛЕННЯ

Abstract

*Oleg R. Chertov, assoc. prof., PhD; Alla Savchuk, student
Mathematical model of population reproduction*

In this paper population reproduction through mathematical modeling is studied. The corresponding model and the results of the statistical experiment based on statistical data from Ukraine are described.

Вступ

Наразі в розвинених країнах світу демографічні характеристики населення (чисельність, процеси його міграції, відтворення, зміни структури тощо) є об'єктом всебічних досліджень. Населення як статистична категорія являє собою сукупність людей, що проживають на певній території. Воно є безпосереднім учасником всіх економічних процесів в державі та споживачем вироблених матеріальних благ. Створення нових, більш точних методів і методик моделювання та прогнозування відтворення населення України є важливою науково-практичною задачею [1].

При аналізі та прогнозуванні демографічних процесів найбільш ефективним інструментом є використання методів математичного моделювання.

До перших математичних моделей демографічних процесів відносяться детерміновані моделі зростання людства, а саме: моделі лінійного та експонентного зростання, опис яких наведено в роботах І. Х. Венецького, Д. Кендалла, Х. Касвелл та інших авторів. Значний внесок у математичну демографію зроблений О. В. Староверовим, який будував моделі демографічних процесів у формі ланцюгів Маркова.

Проведений в [2] порівняльний аналіз сучасних демографічних моделей показав, що найбільш перспективними для аналізу процесів відтворення населення України є модель на основі рівняння Ферхюльста-Пірла та модель Неверової-Левуцької.

Постановка задачі

Метою роботи є розробка моделі відтворення населення і прогнозування чисельності населення України, яка враховує віковий розподіл.

Термінологія

Відтворення населення — це постійне оновлення його поколінь у результаті процесів народжуваності та смертності, а також міграції та соціального руху [3].

Демографічний прогноз — це науково обґрунтоване передбачення основних параметрів руху населення та майбутньої демографічної ситуації: чисельності, статево-вікової та сімейної структури, народжуваності, смертності, міграції, що становить базу для подальших прогнозів та планів соціально-економічних процесів в цілому.

Опис моделі

В роботі [2] було показано, що формально найбільш коректною для України є динамічна модель на основі рівняння Ферхюльста-Пірла [4], тому, що вона найкраще моделює загальну чисельність населення, відносна похибка від реальних даних складає близько 2%. Але особливістю цієї моделі є те, що за її допомогою можна досить точно спрогнозувати загальну чисельність населення, але вона не дає уявлення про статево-вікову структуру. Тому для прогнозу відтворення населення України найбільш оптимальним є застосування цієї моделі у комбінації з моделлю Неверової-Левуцької [5].

На першому кроці будемо будувати прогноз на основі моделі Неверової-Левуцької, яка дає уявлення про вікову структуру.

Специфіка представлених даних, які використовуються для опису демографічної динаміки, полягає в тому, що чисельність населення розбито на 14 послідовних когорт, довжиною в 5 років, за виключенням 3-ї, 4-ї, 13-ї і 14-ї когорт. Третя когорта має довжину 6 років – з 10 до 15, четверта довжиною в 4 роки – з 16 до 19, тринадцята – десять років – з 60 до 69, а в останню когортю входить все населення старше 70 років [5].

В основу створюваної моделі лягли такі положення.

1. Через 5 років будь-яка когорта (виключаючи останню) повністю переходить у наступну за умови, що когорта складається з 5-ти вікових груп з урахуванням смертності та міграції. Наприклад, когорта № 1 через 5

років повністю переходить до когорти № 2, оскільки через 5 років всі новонароджені стануть 5-річними, а п'ятирічні — 10-річними.

2. Чисельність першої когорти формується на основі чисельності новонароджених за попередні 5 років з урахуванням дитячої смертності.

3. Чисельність новонароджених в кожному році визначається чисельністю населення репродуктивного віку в попередньому році.

4. У наступних когортах чисельність у межах п'ятирічного інтервалу змінюється під впливом смертності та процесів міграції.

Модель має наступний вигляд:

$$\begin{cases} B(n) = \alpha(P_3(n-1) + P_4(n-1) + \dots + P_{10}(n-1)), \\ P_1(n) = B(n-1) + v_1 B(n-2) + v_2 B(n-3) + v_3 B(n-4) + v_4 B(n-5), \\ P_2(n) = w_1 * P_1(n-5), \\ P_3(n) = w_2 * P_2(n-5), \\ \dots \\ P_{12}(n) = w_{11} * P_{11}(n-5), \\ P_{13}(n) = w_{12} * P_{12}(n-5) + w_{13}(n-5) \end{cases}$$

де $P_i(n)$ — чисельність населення в i -тій когорті для n -того року; $B(n)$ — чисельність новонароджених у n -тому році; w_i — коефіцієнт переходу населення в i -тій когорті при переході в когорту $(i+1)$ через 5 років; α — коефіцієнт народжуваності; v_k — коефіцієнт виживання дітей віком $n-k$ в першій когорті, де $k = \overline{1,4}$.

Модель включає 13 рівнянь (за кількістю когорт) і одне рівняння для опису чисельності новонароджених. Параметри моделі оцінюються на основі статистичних даних про чисельність населення окремо для кожного рівняння.

Перше рівняння описує динаміку чисельності новонароджених. Кількість новонароджених визначається чисельністю населення в репродуктивному віці, тобто когортами з 4-ої по 10-ту. Шляхом знаходження коефіцієнтів кореляції між чисельністю новонароджених і комбінаціями чисельності репродуктивних когорт були виділені основні когорти, що визначають чисельність новонароджених. Це когорти 5, 6 і 7, оскільки значення коефіцієнта кореляції між чисельністю новонароджених і чисельністю населення в цих когортах найбільше — 0,799 і є значимим. Оцінка коефіцієнта народжуваності проводилася на основі регресійного аналізу.

В основі другого рівняння лежить положення 2, а саме те, що чисельність першої когорти в $(n+1)$ -му році складається з новонароджених n -того року, $(n-1)$ -го року, $(n-2)$ -го року, $(n-3)$ -го та $(n-4)$ -го року з урахуванням смертності. Коефіцієнти смертності для цього рівняння

знаходилися як середні значення статистичних величин, що характеризують дитячу смертність і смертність дітей у віці від року до 4 років.

Оцінка параметрів в інших рівняннях проводилася на основі властивості когорти, а саме: для рівняння 3 через 5 років чисельність 1 когорти з урахуванням смертності перейде в 2 когорту. Аналогічно були визначені значення коефіцієнтів для решти рівнянь моделі.

Більш докладно зупинимося на останньому рівнянні, що описує динаміку 13 когорти. За теоретичною моделлю рівняння має вигляд:

$$P_{13}(n) = w_{12} * P_{12}(n-5) + w_{13}(n-5).$$

Вид рівняння пояснюється тим, що чисельність останньої когорти визначається частиною 12-ї когорти, яка перейшла в неї з урахуванням смертності та міграції, і здатності до виживання 13-ї когорти за 5 років.

Далі будується модель Ферхюльста-Пірла

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(\beta - \gamma * P),$$

з початковою умовою $P(t_0) = P_0 \geq 0$, де параметри $\beta \geq 0$ — коефіцієнт відтворення населення; $\gamma \geq 0$ — параметр, що враховує вплив лімітуючих факторів. Розв'язок рівняння має наступний вигляд:

$$P_t = \frac{\beta P_0 e^{\beta(t-t_0)}}{\beta + \gamma P_0 (e^{\beta(t-t_0)} - 1)}.$$

Графік P_t являє собою так звану логістичну криву.

На основі цієї моделі прогнозується загальна чисельність населення. Потім ця чисельність розподіляється за частками кожної вікової групи, які отримані за допомогою моделі Неверової-Левуцької.

Статистичний експеримент

На основі даних про чисельність та статеву-віковий склад населення в Україні за період з 1991 по 2001 рр. [6] зробимо порівняльний аналіз прогнозу для 2010 року, побудованого за цією моделлю, зі статистичними даними. Результати наведено в табл.1.

Висновки

Математична модель достатньо адекватно (відносна похибка не перевищує 4%) моделює процес зміни вікової структури населення та надає широкі можливості для узагальнення та модифікації. Отримані результати можуть бути використані для аналізу та прогнозу відтворення населення та управління суспільними процесами.

Одним із варіантів подальшого покращення побудованої моделі представляється додавання параметрів, що враховують соціально-економічні фактори.

Таблиця 1.

Порівняння статистичних значень чисельності вікових груп населення України з розрахованими значеннями у 2010 році (тис. осіб)

	Дані статистики	Розраховані значення	Відносна похибка, %
0	509	503	1,16
1-4	1 849	1 867	0,97
5-9	1 961	2 015	2,73
10-15	2 165	2 197	1,51
16-19	2 852	2 915	2,20
20-24	3 689	3 547	3,85
25-29	3 724	3 625	2,66
30-34	3 361	3 483	3,65
35-39	3 245	3 226	0,61
40-44	3 021	3 127	3,51
45-49	3 485	3 554	1,99
50-54	3 398	3 457	1,72
55-59	3 052	3 159	3,49
60+	9 471	9 583	1,18
Разом	45 783	46 258	1,04

Література

1. Демография: современное состояние и перспективы развития: Учеб. пособие / Н. В. Зверева, А. Я. Кваша, В. И. Козлов и др.; Под ред. Д. И. Валентая. — М. : Высш. шк., 1997. — 271 с.
2. Чертов О. Р., Савчук А. Б. Порівняльний аналіз моделей чисельності населення України // Прикладна математика та комп'ютеринг ПМК – 2011: зб. тез доп. / редкол.: І. А. Дичка [та ін.]. — К. : Просвіта, 2011. — С. 349 — 352.
3. Стеценко С. Г. Демографічна статистика: Підручник. — К. : Вища шк., 2005. — 415 с.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М. : Наука, 1976. — 276 с.
5. Неверова Г. П., Ревуцкая О. Л. Анализ процесса воспроизводства населения ЕАО // Современные проблемы регионального развития. — Хабаровск : ДВО РАН, 2006. — С. 276-279.
6. Населення України за 2010 рік. Демографічний щорічник. — К. : Державна служба статистики України, 2011. — 442 с.