УДК 044.67:519.63+551.551.31

проф. Молчанов О.А., студент Козік М.В.

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ КОЛЛОКАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ВЕЙВЛЕТІВ ДРУГОГО ПОКОЛІННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ЗАДАЧ ГІДРОДИНАМІКИ

Abstract

Molchanov O. A., prof., Kozik Mykhailo, student
Modification of collocation method with second-generation wavelets for evolution problems in Fluid dynamics

This work is devoted to evolution problems in Fluid dynamics with second-generation wavelets. The classic collocation method and lifting scheme is studied and discussed. Theoretical modification scheme with these methods presented. The ways for further research are proposed as well.

Вступ

У гідродинаміці виникає дуже багато задач, де потрібно досліджувати рух в'язкої нестисненої рідини, в загальному випадку в будь-якому середовищі. До таких задач належить прогнозування погоди та катастрофічних подій, розробка гідрологічної техніки, дослідження водних потоків тощо. Важливе місце в таких дослідженнях належить аналізу хвильових процесів в атмосфері, які також можуть описуватись гідродинамічними моделями. Найкраще описує такі фізичні явища повна система рівнянь Нав'є-Стокса.

Є багато новітніх підходів до цифрового аналізу сигналів, серед яких, скоріше за все, найпопулярнішим є використання вейвлетів [1, 2]. За більш ніж 20 років вейвлети показали свою практичну цінність як самостійний інструмент, так і в поєднанні з іншими методами. Однак обмежений набір вейвлет-базисів є вагомим недоліком для будь-якої задачі. Схема ліфтингу дозволяє конструювати вейвлет-базиси відповідно до власних потреб, це так звані вейвлети другого покоління. В даній роботі представлений коллокаційний метод з використанням вейвлетів другого покоління та його застосування до системи рівнянь Нав'є-Стокса.

Постановка задачі

Об'єкт дослідження — гідродинамічні процеси, що описуються системою Нав'є-Стокса, аналіз існуючих теоретичних та практичних підходів до розв'язання задачі.

Предмет дослідження — схема ліфтингу (вейвлети другого покоління) в якості розширення звичайного коллокаційного методу.

Мета дослідження — вдосконалення коллокаційного методу, використовуючи схему ліфтингу — схему, з допомогою якої конструюються вейвлети другого покоління для розв’язання системи рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + k\Delta\vec{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \qquad (1)$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0 \qquad (2)$$

де ∇ - гамільтоніан, Δ - лапласіан, k - коефіцієнт кінематичної в'язкості, ρ - густина, p - тиск, $\vec{v}$ - вектор швидкостей, $\vec{f}$ - вектор масових сил.

В якості граничних умов беремо експоненціальний спад густини і тиску зі збільшенням висоти.

Схема ліфтингу

Вейвлети, що зсувають і масштабують одну функцію — найпоширеніші вейвлети і називаються *вейвлетами першого покоління*. Схема ліфтингу дозволяє конструювати *вейвлети другого покоління* [3], які не “прив'язані” до однієї функції.

Використання схеми ліфтингу для конструювання вейвлетів має наступні переваги [4]:

1. Схема лістингу швидша за вейвлет-перетворення (ШВП) приблизно в 2 рази.
2. Схемі ліфтингу не потрібно додаткової пам'яті для виконання вейвлет -перетворення (*in-place* обчислення).
3. Для схеми ліфтингу дуже просто знайти інверсне перетворення (достатньо всі знаки “+” замінити на знаки “–” та виконати всі операції в зворотньому порядку).
4. Ліфтинг-схема достатньо проста для розуміння, оскільки не бере за основу аналіз Фур'є.

Класична схема ліфтингу складається з трьох рівнів (рис. 1):

- SPLIT (розділення сигналу λ_0 на два вдвічі менших за розміром сигнали λ_{-1} і γ_{-1})

- PREDICT (прогнозування сигналу γ_{-1} за сигналом λ_{-1})
- UPDATE (уточнення сигналу λ_{-1} за різницею між сигналом γ_{-1} та його прогнозованим значенням)

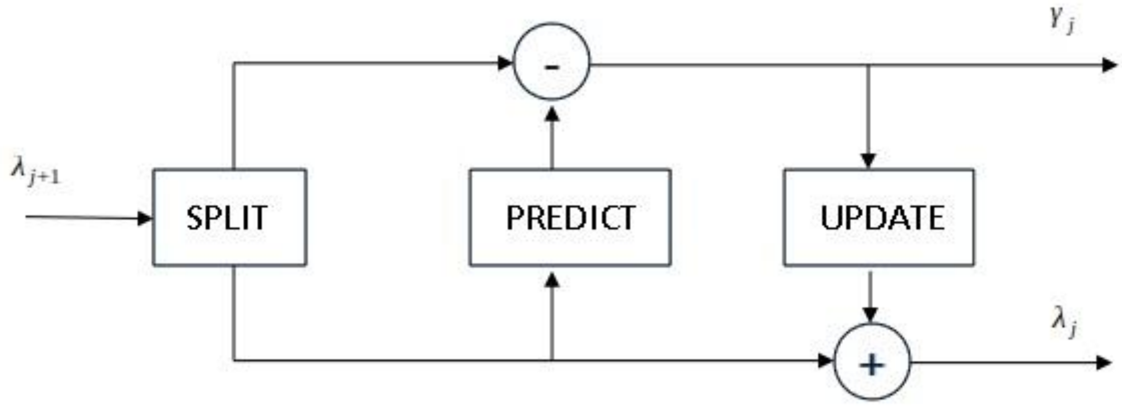

Рис. 1. Три етапи ліфтингу: розділення, прогнозування, уточнення

Метод коллокації на основі вейвлетів другого покоління

Розв'язком задачі буде визначення значень невідомої функції у точках коллокації. Як відомо, будь-яку функцію можна дискретизувати у термінах скейлінг-функцій і вейвлетів [5]:

$$f^j(x) = \sum_k c_k^0 \cdot \varphi_k^0(x) + \sum_j \sum_l d_l^j \cdot \psi_l^j(x) \quad (3)$$

Головна ідея методу базується на тому, що замість використання вейвлет-перетворення для обчислення значень коефіцієнтів d_k^j ми використовуємо схему ліфтингу [6]. Відкинувши ті вейвлет-коефіцієнти, що менші за деякий поріг ε, ми майже не втратимо точності обчислень, проте значно прискоримо процес динамічної адаптації сітки до поверхні функції. Підсумовуючи вищесказане, маємо:

$$f^j(x) = f^j_{above}(x) + f^j_{below}(x) \quad (4)$$

де

$$f^j_{above}(x) = \sum_k c_k^0 \cdot \varphi_k^0(x) + \sum_j \sum_l d_l^j \cdot \psi_l^j(x), \left|d_l^j\right| \geqslant \varepsilon \quad (5)$$

$$f^j_{below}(x) = \sum_j \sum_l d_l^j \cdot \psi_l^j(x), \left|d_l^j\right| < \varepsilon \quad (6)$$

Варто відзначити, що даний критерій відбору точок називається ***ідеальним критерієм реконструкції*** Ліандрата і Чамічіана, тобто використовуючи такий алгоритм для відтворення функції $f^j(x)$, вона буде мати похибку не більш ніж ту, що була закладена у критерій відбору. Формальний ітераційний алгоритм методу наступний:

1. За відомими значеннями функції в точках коллокації $\vec{u}_k^j(x)$ обчислюємо вейвлет-коефіцієнти за схемою ліфтингу.
2. Обчислюємо значення функції на сітці $t + \Delta t$, але лише ті, яких немає на попередній сітці t.
3. Інтегруємо отриману систему диференціальних рівнянь, для того, щоб отримати нові значення функції на нерегулярній сітці $t + \Delta t$.

Висновки

Розроблена модифікація методу є новим підходом до розв'язання диференціальних рівнянь в часткових похідних. Внаслідок використання схеми ліфтингу замість звичайного вейвлет-перетворення може істотно збільшитись точність розв'язку та зменшитись час, за який він буде знайдений.

В подальшому потрібно реалізувати модифікований метод, аби впевнитись в його якості. Крім того, перспективно узагальнити алгоритм на тривимірний простір та розглянути нові підходи до модифікації його основних підзадач — динамічної адаптації сітки та просторового інтегрування.

Література

1. *Rich Vud*ue. A Wavelet Collocation Method for Solving PDEs // U.C. Berkeley Math 228B Report, 2001.
2. *Dian Zhou, Wei Cai.* A Fast Wavelet Collocation Method for High-Speed Circuit Simulation // IEEE Trans. on Circuit and Systems, vol. 46, no. 8, 1999.
3. *Wim Sweldens*. The Lifting Scheme: A Construction of Second Generation Wavelets. // To appear in SPIE, 1995.
4. *Wim Sweldens*. The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions. // Proc. SPIE Vol. 2569, p. 68-79, 1998.
5. *I. Daubechies*. Ten Lectures on Wavelets. // CBMS-NSF Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol. 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.
6. *Oleg V. Vasilyev*, Christopher Bowman. Second-Generation Wavelet Collocation Method for the Solution of Partial Differential Equations // Journal of Computational Physics, vol. 165, pp. 660-693, 2000.