

УДК 004.942

**К.т.н., доцент Маслянюк П.П., аспірант Рябушенко А.В.,  
магістрант Козленко М.В.**

**Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»**

## **ОЦІНЮВАННЯ ЧУТЛИВОСТЕЙ ВАРТОСТІ ПОХІДНИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ ДЛЯ УПРАВЛІННЯ ТА ХЕДЖУВАННЯ РИЗИКІВ**

### **Abstract**

**Pavlo Maslyanko, assoc. prof., PhD; Andriy Riabushenko, postgraduate student;  
Mykola Kozlenko, master student**

***Evaluation of the risk sensitivities of derivative financial instruments  
for risk management and hedging***

*This paper concerns the evaluation of risk sensitivities of derivative financial instruments. As common evaluation methods are not efficient with more complex and precise Stochastic Mean and Multifractal Volatility Model, an application of Complex-Step Derivative Approximations and Automatic Differentiation is proposed. The applications of the obtained values to risk management and hedging are presented.*

### **Вступ**

Протягом останніх років спостерігається загальна тенденція до стрімкого зростання ринку похідних цінних паперів (також відомих як похідні фінансові інструменти, ПФІ). Зокрема, з 2004 до 2007 року обсяг торгів усіма видами опціонів подвоївся. Станом на 2009 рік обсяг торгівлі валютними опціонами на біржі становив близько 11 трильйонів доларів США, а опціонами з відсотковою ставкою – 108 трильйонів доларів. У 2006 році річний обіг ПФІ склав 1,6 квадрильйони доларів США і в кілька разів перевищив обіг ринку експорту товарів. Управління інвестиційним портфелем цінних паперів вимагає точного оцінювання вартості ПФІ, а також ефективних методів оцінювання чутливостей фінансових інструментів, що дозволить оцінювати ризики.

Чутливості опціонів являють собою похідні першого та другого порядку від вартості опціону за різними параметрами. Ці параметри дозволяють оцінити вплив різних ризиків, які прямо впливають на ціну опціону, з метою управління ризиками клієнтів та хеджування ризиків [1]. Кожен з параметрів позначається грецькою літерою та позначає залежність

вартості опціону від вартості активу, ціни виконання, терміну виконання та відсоткової ставки. Метою інвестора є оцінювання значень чутливостей та підтримка їх значень в припустимих межах.

У попередніх дослідженнях [1,2] подається ряд методів оцінювання ризиків, як аналітичних, так і чисельних. Запропоновані методи дозволяють оцінити чутливості ПФІ для простих моделей оцінювання вартості ПФІ. Проте з використанням точніших моделей оцінювання вартості ПФІ, зокрема, моделі випадкового середнього і мультифрактальної волатильності [3], застосування аналітичних методів стає неможливим через надмірну складність їх застосування, а застосування чисельних методів дає результати недостатньо високої точності. Відтак для якнайточнішої оцінки чутливостей ПФІ необхідно застосувати комбінацію методу оцінювання вартості ПФІ та методу оцінювання чутливості, які дадуть найкращу можливу точність.

У цій роботі розглядаються методи оцінювання чутливостей ПФІ та пропонуються точніші методи оцінювання чутливостей для моделі випадкового середнього і мультифрактальної волатильності.

### **Постановка задачі**

Мета роботи полягає в дослідженні методів оцінювання чутливостей ПФІ, оцінювання їх переваг та недоліків, а також розробці точнішого методу оцінювання чутливостей для моделі випадкового середнього і мультифрактальної волатильності.

Об'єкт дослідження – компонент оцінювання чутливостей і компонент оцінювання вартості ПФІ системи управління інвестиційним портфелем цінних паперів.

Предмет дослідження – методи оцінювання вартості ПФІ на фондовому ринку та їх чутливостей.

### **Модель випадкового середнього та мультифрактальної волатильності**

Для якнайточнішої оцінки чутливостей, які являють собою похідні від вартості ПФІ за різними змінними, необхідно застосувати якомога точнішу модель оцінювання власне вартості ПФІ. Також бажано, щоб така модель відповідала вимогам українського ринку, враховуючи основні його закономірності. Такою моделлю є модель випадкового середнього та мультифрактальної волатильності (SMMVM).

Модель випадкового середнього та мультифрактальної волатильності використовує модель Чена для визначення миттєвої дохідності за

допомогою системи стохастичних диференціальних рівнянь, рівняння мультифрактальної моделі з Марковими перемикальними режимами для визначення стохастичної волатильності та модель Вашичека для прогнозування ставок рефінансування [3]. Згідно з цією моделлю, вартість опціону визначається з такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} dS &= r_t S dt + \sigma_t S dW_t \\ dr &= (\theta(t) - ar) dt + \gamma dW_t \\ \sigma_t &= \sqrt{\sigma^2 \prod_{i=1}^k M_t^{(i)}} \end{aligned} \quad (1)$$

де  $S$  – ціна базового фінансового інструмента,  $r_t$  – безризикова ставка дохідності,  $\theta(t)$  – функція довгострокового рівня  $r_t$ ,  $s_t$  – волатильність  $S$ ,  $a$  – швидкість реверсу,  $dW_t$  – вінерівський процес,  $M_t^{(i)}$  – компонент волатильності,  $s, g$  – масштабуючі множники.

Для цієї моделі застосування основних існуючих методів пов'язане з труднощами. Застосування аналітичних методів не є ефективним через громіздкість необхідних викладок. Чисельні методи, зокрема, скінченнорізницевий метод, не дають достатньої точності обчислень: у порівнянні з простішими моделями, зокрема, моделлю Блека-Шоулза, отримані значення чутливостей для моделі випадкового середнього та мультифрактальної моделі значно менш точні [1, 4].

### Методи оцінювання чутливостей

Основними параметрами чутливостей, які дозволяють оцінити залежність вартості фінансового інструмента від основних ризиків, є:

- $\Delta$  (дельта) – похідна вартості ПФІ за вартістю базового фінансового інструменту (активу);
- $v$  (вега) – похідна вартості ПФІ за волатильністю;
- $\theta$  (тета) – похідна вартості ПФІ за терміном виконання;
- $\rho$  (ро) – похідна вартості ПФІ за відсотковою ставкою;
- $\Gamma$  (гама) – похідна від дельти  $\Delta$  за вартістю базового фінансового інструменту.

Для обчислення чутливостей застосовані два методи – апроксимацій похідних із комплексним кроком (CSDA) та автоматичного диференціювання (AD). Обидва ці методи порівняно прості і достатньо точні в застосуванні [4].

**Метод апроксимацій похідних із комплексним кроком.** Метод полягає у формуванні функції з комплексним параметром кроку. Застосування такого параметру дозволяє спростити підрахунок похідних і

досягти точності, спів ставної з аналітичними результатами. За цим методом похідна виражається таким чином:

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \text{Im}[f(x+ih)] \quad (2)$$

Обчислення необхідних значень чутливостей здійснюється на основі системи (1) та формули (2).

**Метод автоматичного диференціювання.** Цей метод полягає в тому, щоб обчислити всі необхідні похідні одразу в ході обчислень, по чергово виконуючи обчислення необхідних похідних при виконанні кожного обчислення. Ефективність методу засновується на тому, що будь-які, навіть найскладніші, обчислення мають у своїй основі комбінацію елементарних функцій, для кожної з яких похідна відома та може бути обчислена досить просто.

Реалізація методу полягає у формуванні вектору чутливостей

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial S} S + \frac{\partial V}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial V}{\partial T} T + \frac{\partial V}{\partial r} r$$

де V- функція виплат.

На основі цієї формули формується матричне рівняння, а далі здійснюється розв'язання цього рівняння в ході розв'язку основної задачі. Цей метод має досить високу ефективність завдяки простоті реалізації [4].

### **Застосування чутливостей для управління та хеджування ризиків**

Кожен із параметрів чутливостей вказує на вплив на вартість ПФІ того чи іншого виду ризиків. Так, дельта ( $\Delta$ ) вказує на зміну вартості ПФІ при невеликій зміні вартості базового фінансового інструмента. Метою інвестора є створити портфель цінних паперів, який був би «дельта-нейтральним», тобто загальна вартість портфелю залишалася б незмінною з невеликими змінами вартості базового фінансового інструменту [5]. Метод формування такого портфелю, відомий як «дельта-хеджування», дозволяє сформувати портфель цінних паперів на основі ПФІ та відповідних їм базових фінансових інструментів так, щоб вони взаємно компенсували позитивні та негативні відхилення значення дельти.

Вега ( $v$ ) відображає вплив волатильності на вартість цінного паперу. Цей параметр важливий для моніторингу, особливо для трейдерів, які працюють на ринках, яким притаманні значні коливання волатильності, як, зокрема, й на українському фондовому ринку. Тета ( $\theta$ ) показує зміну вартості опціону в залежності від часу. Цей параметр також має важливе значення для захисту інвестора від ризиків: фінансовий інструмент із часом може втрачати в ціні, оскільки зі зменшенням часу до реалізації опціону стає все меншою ймовірність різкої зміни ціни. Відтак

спостереження за цим параметром важливе для запобігання знеціненню портфелю.  $\rho$  (р) показує залежність вартості опціону від зміни відсоткової ставки. Це найменш важливий параметр, оскільки коливання відсоткової ставки мають не надто значний вплив на вартість ПФІ.

Серед других похідних найбільше практичне значення має гама ( $\Gamma$ ), яка дозволяє оцінити залежність  $\Delta$  від зміни ціни. Вона використовується при хеджуванні ризиків, де використовується для перевірки запропонованого хеджування на якомога ширшому діапазоні цін.

## Висновки

Для ефективного оцінювання ризиків інвестиційного портфелю цінних паперів необхідно мати точні значення чутливостей фінансових інструментів. Класичні аналітичні та чисельні методи оцінювання чутливостей недостатньо ефективні при використанні складнішої та точнішої моделі випадкового середнього та мультифрактальної волатильності. У зв'язку з цим є доцільним використовувати ефективні та нескладні в застосуванні методи оцінювання чутливостей – метод апроксимацій похідних із комплексним кроком та метод автоматичного диференціювання. Точна оцінка чутливостей фінансового інструменту дозволяє реалізувати стратегію управління та хеджування ризиків, а саме створення портфелю, вартість якого залишалася б незмінною зі зміною вартості базового фінансового інструменту, а також відслідковувати вплив на вартість ПФІ таких факторів як волатильність, час та відсоткова ставка.

## Література

1. *Hull J.C.* Options, Futures, and Other Derivatives // Prentice Hall.– 2005. – P.815.
2. *Wilmott P.* Paul Wilmott on Quantitive Finance // John Wiley&Sons, Ltd.– 2006. – P.1380.
3. *Маслянюк П.П., Рябушенко А.В., Козленко М.В.* Модель випадкового середнього та мультифрактальної волатильності для оцінювання вартості похідних фінансових інструментів // Сучасні тенденції розвитку інформаційних технологій в науці, освіті та економіці: Матеріали V Всеукраїнської науково-практичної конференції, 7—9 квіт. 2011 р. : зб. тез. доп. — Луганськ: Phoenix, 2011. — С. 104–107.
4. *Homescu C.* Generic computing alternatives for better Greeks // SSRN. – 2011-09-22.– P.28.
5. *Haug E.G.* Numerical The Complete Guide to Option Pricing Formulas // McGraw-Hill.– 2007. – P.492.