УДК 51 (082)

аспірант Чернега П. П.

Національна академія наук України
Інститут математики

ЛОКАЛЬНИЙ ЧАС ДЛЯ ПОТОКУ АРРАТЬЯ

Abstract

P. Chernega, postgraduate student
Local time for Arratia flow

Given paper is dedicated to one of new objects in modern mathematics - an Arratiya flow. The Arratiya flow differs from smooth stochastic flow by the singular structure of the interaction - a small parts, which were met, stick together. So in spite of the fact that Arratiya flow is make up with the univariate brownian process, itself it is nongaussinan object. The study of functionals from Arratiya flow brings about need of the study of the moments of sticking. In this work the study of the local time for Arratia flow is carried out.

Вступ

Основним об'єктом дослідження в даній роботі є поведінка ймовірнісних характеристик функціоналів від *стохастичних потоків*. Зі стохастичними потоками пов'язано ряд нових ідей і методів дослідження, які виникли в зв'язку як з потребами прикладних галузей, так і з розвитком теорії випадкових процесів. Так, наприклад, стохастичні потоки з'являються як аналог потоку гомеоморфізмів, що відповідає диференціальному рівнянню в скінченновимірному евклідовому просторі. Такі потоки вивчались багатьма авторами. При цьому виявилось, що не дивлячись на зовнішню аналогію з детермінованим випадком, потоки, що відповідають стохастичним диференціальним рівнянням, мають нові властивості. Зокрема, навіть при сприятливих коефіцієнтах може мати місце більш ніж лінійне зростання по просторовій змінній.

Новий поштовх в дослідженні стохастичних потоків пов'язаний з трактуванням потоку як сімейства дифузійних, чи, більш загально, марківських процесів, певним чином пов'язаних між собою. Така точка зору з'явилась у зв'язку з розвитком математичних моделей, що описують системи взаємодіючих частинок. В подальшому робились спроби побудови загального підходу до стохастичних потоків, який би з єдиної точки зору охоплював як потоки, що відповідають диференціальним рівнянням, так і потоки, побудовані для систем взаємодіючих частинок (Arratia; А. А. Дороговцев [1] та ін.). В останній книзі одним з центральних понять є поняття *стохастичного потоку, пов'язаного з мірозначним процесом*. Під мірозначним процесом розуміють перенос потоком деякої початкової міри (наприклад розподілу частинок).

На сучасному етапі виділено декілька класів марківських мірозначних процесів. Процеси першого класу, які називають суперпроцесами, описують системи незалежних «розгалужуваних» марківських частинок і належать до процесів змінної маси. Інтерес до них викликаний тим, що для функціоналів від них виникають нелінійні параболічні рівняння. Другий відомий клас мірозначних процесів – це процеси Флемінга-Віота і близькі до них, в яких флуктуації маси в просторі виникають за рахунок переміщення частинок (прототипом такого руху є мутації в генетиці). Це процеси з постійною масою. Як правило, побудова таких процесів проводиться наступним чином [1]: спочатку розглядається скінченна система частинок, що еволюціонуэ за деяким законом (включаючи можливість розгалуження). Потім утворюється мірозначний процес як еволюція відповідним чином нормованої міри – розподілу частинок. І як слабка границя при збільшенні кількості початкових частинок і (інколи) нормуванні часу, отримується потрібний процес.

Постановка задачі

Задача полягає у перенесенні на випадок потоку Арратья поняття локального часу в нулі для броунівського руху, вивченні такого локального часу як адитивного функціоналу від потоку та обчисленні його характеристики.

Термінологія

Ω - ймовірнісний простір подій;
$\Im$ - σ-алгебра подій на ймовірнісному просторі;
P - ймовірнісна міра;
$x(\cdot,\cdot)$ - потік Арратья;
w, $(x(u,\cdot))$ - вінерівський процес, (який стартує з точки u);

Опис алгоритму
Визначення

Потік Арратья – випадковий процесс $\{x(u),\, u \in \mathbb{R}\}$, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ зі значеннями в просторі $D(-\infty;\infty)$ з наступними властивостями

1) $x(u_k,\cdot)$ – стандартний вінерівський процесс, що стартує з u_k
2) $\forall t\in[0;1]: x(u_1,t)\le ...\le x(u_n,t)$
3) розподіл $(x(u_1,\cdot),...,x(u_n,\cdot))$ співпадає з розподілом стандартного n – мірного вінерівського процесу, який починається в $(u_1,...,u_n)$ на множині
$\{f\in C([0;1],R^n): f_k(0)=u_k,\ k=\overline{1,n},\ f_1(t)<...<f_n(t),\ t\in[0;1]\}$.

Лема 1

$$\exists P-п.н.\lim_{\Delta\to 0+}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{t\wedge\tau_{u_k}} f_\varepsilon\ x\ u_k,s\quad ds,$$

$u_k=k\cdot\Delta$, $\Delta=\frac{1}{2^m}$, $k\in Z$, $m\in N$; $x\ \cdot,\cdot$ – потік Арратья;

$f_\varepsilon\ y\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon}}$; $\tau_{u_K}=\inf\ s: x\ u_k,s\ =x\ u_{k-1},s\quad\wedge 1$

Вказана границя визначає адитивний функціонал, що відповідає за *сумарний локальний час в нулі до моменту склейки* для частинок потоку:

$$\Phi_t:=\int\int_0^{t\wedge\tau_u}\delta_0(x(u,r))dr$$

Лема 2

Характеристика Φ_t має наступний вигляд [2,3,4]:

$$M_\varphi\Phi_t=\int_0^t dr\int_0^{+\infty}dy\ f'_{\frac{r}{2}}(y)\int_{-\infty}^{+\infty}dz\ f_{\frac{r}{2}}(\varphi(z)+\frac{y}{\sqrt{2}})$$

Висновки

В даній роботі здійснюється побудова локального часу для потоку Арратья та дослідження його властивостей. Актуальність такого дослідження аргументується тим, що потік Арратья може бути описаний як марківський процес в просторі Скорохода. Дослідження адитивних функціоналів від такого процесу може бути проведено в термінах побудованого інтеграла. Крім того, такий інтеграл є зручним аргументом при описі і доведенні аналога теореми Гірсанова, представлення Кларка для функціоналів від потоку [1]. Основною обставиною, що робить можливим побудову такого інтеграла є те, що сумарний час вільного пробігу до моменту склейки виявляється скінченним навіть для зліченної кількості частинок, що стартують з деякого відрізка.

В роботі також здійснюється побудова простору та σ- алгебри на ньому, де потік Арратья можна розглядати як марківський процес.

Розглянуто також так звану «броунівську мережу» та схему її побудови. Така мережа є аналогом потоку Арратья з основною відмінністю в тому, що частинки в ній можуть стартувати (народжуватись) з будь-яких точок в будь-який момент часу.

Література

1. *Дороговцев А.А.* Мерозначные процессы и стохастические потоки, - Київ, 2007 р., -288 с.
2. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы, - М. 1963р., -850 с.
3. *Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М.* Марковские процессы, - М., 1989 р.- 412 с.
4. *Гихман И.И, Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения, - Київ, 1968,- 560 с.