

УДК 314.1+519.2

К.т.н., доцент Чертов О.Р., студентка Савчук А.Б.

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ЧИСЕЛЬНОСТІ НАСЕЛЕННЯ УКРАЇНИ

### Abstract

*Oleg R. Chertov, assoc. prof., PhD; Savchuk Alla, student  
Comparative analysis of the Ukrainian population models*

*In this paper studies the demographic situation through mathematical modeling. Describes four models and made a comparative analysis based on statistical data in Ukraine.*

### Вступ

У зв'язку зі старінням і депопуляцією (процесом систематичного скорочення абсолютної чисельності) населення України та необхідністю вироблення адекватних заходів для покращення демографічної ситуації в країні зростає значення наявності точної та актуальної демографічної інформації, її дослідження за допомогою математичного моделювання.

Існує велика кількість математичних моделей, що описують загальну демографічну ситуацію з виділенням основних соціально-демографічних факторів. Потрібно відзначити, що класифікації моделей запропоновані в роботах Д.І. Валентя [1], В.М. Медкова, В.А. Борисова. Практичне використання деяких статистичних методів наведено в підручнику А.Я. Боярського, питанням глобальних проблем в демографії велика увага приділяється в роботах Н.М. Римашевського. Демографічним проблемам на регіональному рівні також присвячено ряд робіт, але в них описується загальна демографічна ситуація на основі статистичних методів аналізу. При цьому існуючі можливості математичного моделювання для точного опису та отримання адекватного прогнозу, як правило не використовуються.

### Постановка задачі

Метою роботи є дослідження ряду відомих демографічних моделей та їх порівняльний аналіз на основі даних про чисельність населення в Україні.

## Опис моделей

Модель № 1 — математична модель динаміки чисельності населення з урахуванням вікової структури [2]. Специфіка представлених даних, які використовуються для опису демографічної динаміки, полягає в тому, що чисельність населення розбита на 14 послідовних когорт, довжиною в 5 років, за виключенням 3-ї, 4-ї, 13-ї і 14-ї когорт. Третя когорта має довжину 6 років — з 10 до 15, четверта довжиною в 4 роки — з 16 до 19, тринадцята — десять років — з 60 до 69, а в останню когорту входить все населення старше 70 років.

Модель має вигляд:

$$\begin{cases} B(n) = \alpha(P_3(n-1) + P_4(n-1) + \dots + P_{10}(n-1)), \\ P_1(n) = B(n-1) + v_1 B(n-2) + v_2 B(n-3) + v_4 B(n-5), \\ P_2(n) = w_1 * P_1(n-5), \\ P_3(n) = w_2 * P_2(n-5), \\ \dots \\ P_{12}(n) = w_{11} * P_{11}(n-5), \\ P_{13}(n) = w_{12} * P_{12}(n-5) + w_{13}(n-5) \end{cases}$$

де  $P_i(n)$  — чисельність населення в  $i$ -тій когорті для  $n$ -того року;  $B(n)$  — чисельність новонароджених у  $n$ -тому році;  $w_i$  — коефіцієнт переходу населення в  $i$ -тій когорті при переході в когорту  $i-1$  через 5 років;  $\alpha$  — коефіцієнт народжуваності;  $v_k$  — коефіцієнт виживання дітей віком  $n-k$  в першій когорті, де  $k = \overline{1,4}$ .

Модель включає 13 рівнянь (по кількості когорт) і одне рівняння для опису чисельності новонароджених. Параметри моделі оцінюються на основі статистичних даних про чисельність населення окремо для кожного рівняння.

Модель № 2 — модель, що враховує статево-віковий розподіл [1]. Вплив статево-вікового профілю характеризується наступним рівнянням:

$$\frac{\partial P(x, s, t)}{\partial t} + \frac{\partial P(x, s, t)}{\partial a} = -(\mu_p(x, s, t) * P(x, s, t) + Migr(x, s, t)),$$

де  $x$  — вік;  $s$  — стать;  $t$  — час;  $P(x, s, t)$  — чисельність населення;  $Migr(x, s, t)$  — нетто міграції;  $\mu_p(x, s, t)$  — ймовірність смерті.

В якості граничних умов задається число новонароджених, яке визначено згідно функції народжуваності, що залежить від віку матері та часу:

$$P(0, s, t) = \int_{a_1}^{a_2} fert(x, t) * P(x, females, t) da,$$

де  $a_1$  і  $a_2$  — границі вікового інтервалу жінок дітородного віку;  $fert(x, t)$  — функції народжуваності,  $females$  — жінки.

Модель № 3 — модель на основі автономної системи масового обслуговування з двома типами заявок і необмеженою кількістю приладів [3]. У термінах демографії під заявкою першого типу мається на увазі жінка, а під заявкою другого типу — чоловік, під часом обслуговування в системі розуміється тривалість життя людини. Стан автономної системи в момент часу  $t$  визначається чотиривимірним вектором

$$n(t) = n_1(t), n_2(t), n_3(t), m(t)^T,$$

де  $n_i(t)$  — число заявок першого типу, які обслуговуються на  $i$ -й фазі в момент часу  $t$ , а  $m(t)$  — число заявок другого типу, які обслуговуються в системі в момент часу  $t$ . У термінах демографії  $n_i(t)$  визначає чисельність жінок на  $i$ -й фазі (в  $i$ -й віковій групі), а  $m(t)$  чисельність чоловіків. Задача дослідження даної математичної моделі полягає в знаходженні розподілу ймовірностей

$$P(n_1, n_2, n_3, m, t) = P \quad n_1(t) = n_1, n_2(t) = n_2, n_3(t) = n_3, m(t) = m,$$

або її найбільш важливих числових характеристик.

Модель № 4 — динамічна модель на основі рівняння Ферхюльста-Пірла, що описує логістичну еволюцію популяції в середовищі з обмеженими ресурсами [4]:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = P(\alpha - \gamma * P),$$

де  $P(t)$  — чисельність населення в час  $t$ ,  $\alpha$  — коефіцієнт відтворення населення, що визначає приріст населення за одиницю часу в розрахунку на одну людину;  $\gamma$  — деякий параметр, що враховує вплив лімітуючих факторів. Тут  $\frac{\alpha}{\gamma} = K$  є граничною чисельністю населення, яку можна досягти на даній території в умовах обмеженості ресурсів (зазвичай,  $K$  називають ємністю середовища). При цьому міграція та характер розподілення населення територією країни в часі не використовуються. Рівняння загалом має нескінченну множину розв'язків, тому в конкретному випадку необхідно задати початкові умови — приймається, що в початковий момент часу  $t_0$  чисельність населення відома і дорівнювала  $N_0$ . Розв'язок диференційного рівняння наведеної моделі буде обмежений зверху і знизу, тому що чисельність населення не може перевищити ємність  $K$  середовища і бути від'ємною.

### Порівняльний аналіз

На основі даних про чисельність та статеву-віковий склад населення в Україні за період з 1991 по 2010 рр. [5] зробимо порівняльний аналіз прогнозів, побудованих за цими моделями (рис. 1).

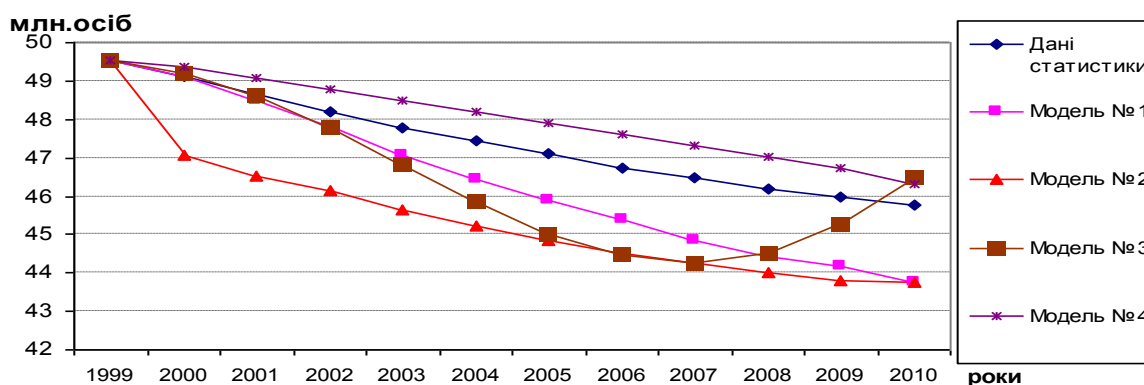


Рис.1. Динаміка чисельності населення України за різними варіантами моделей

## Висновки

У даному дослідженні були розглянуті чотири різних моделі чисельності населення, наведено їх короткий опис, а також зроблено порівняльний аналіз на основі статистичних даних по Україні.

Як видно із рис. 1, всі математичні моделі досить адекватно (відносна похибка не перевищує 5%) моделюють процес зміни вікової структури населення і у більшості із них з віддаленням від часу відліку прогнозу збільшується його похибка. На основі даного порівняльного аналізу можна зробити висновок, що найбільш коректною для України є динамічна модель на основі рівняння Ферхюльста-Пірла.

У подальшій роботі планується застосовувати цю модель для детального прогнозування чисельності населення в Україні та її регіонах.

## Література

1. Демография: современное состояние и перспективы развития: Учеб. пособие / Н. В. Зверева, А. Я. Кваша, В. И. Козлов и др.; Под ред. Д. И. Валентая. — М. : Высш. шк., 1997. — 271 с.
2. Неверова Г. П., Ревуцкая О. Л. Анализ процесса воспроизводства населения ЕАО // Современные проблемы регионального развития : ДВО РАН, 2006. — С. 276-279.
3. Назаров А. А. Теория массового обслуживания. — Томск : Изд-во НТЛ, 2004. — 228 с.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. — М. : Наука, 1976. — 276 с.
5. Населення України. 2009. Демографічний щорічник. — К. : Держкомстат України, 2009. — 400 с.