

К.т.н., доцент Соколова Н. А, магістрант Ісаєв Д. В.

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»**

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИХРОВИХ АКУСТО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ В АТМОСФЕРІ

Abstract

*Nadegda A. Sokolova, assoc. prof., PhD; Dmitryi Isayev, student
Mathematical modeling of vortical acoustic gravity waves*

This paper is devoted to the study of vortical acoustic gravity waves. For the analysis of waves their basic descriptions are used: speed, density, pressure. For studying these descriptions mathematic model of that kind of waves was developed and solved using splitting scheme and predictor-corrector's method. Special software which allow to produce calculations with high accuracy and can make visualization of waves propagation was developed.

Вступ

У зв'язку з кліматичними змінами, що спостерігаються в наш час, все більш актуальною є проблема появи в середніх широтах таких потужних метеорологічних утворень, як циклони тропічного типу, урагани та смерчі. Ці утворення мають вихрову природу і тому концентрують в порівняно невеликих обсягах (від декількох кілометрів до десятків або інколи сотень кілометрів) дуже великий енергетичний потенціал і їх дія на наземні об'єкти є катастрофічною. Але значно менш вивчено хвильові впливи цих утворень на середню та верхню атмосферу, зокрема на плазмову іоносферу [1]. І це є проблемою, що визначається як притаманною складністю явищ, так і проміжним (мезомасштабним) просторовим їх характером.

Існуючі моделі для досліджень таких вихрових утворень є надто складними. У даній статті пропонується модель та алгоритм її розв'язку, що призначені для програмної реалізації.

Постановка задачі

Фізично модель можна представити таким чином. Нехай задано атмосферний вихор, початково у стані стаціонарного обертання. Оточимо його вертикальною циліндричною поверхнею, на якій зовні задано поле

швидкостей, що відповідає полю швидкостей вихра. Розповсюдження хвиль будемо розглядати в горизонтальному шарі висоти H_B , вирізаному в атмосфері двома горизонтальними площинами з властивостями поглинання падаючого на них випромінювання.

Метою роботи є створення математичної моделі вихрових акусто-гравітаційних хвиль в атмосфері.

Моделювання вихрових акусто-гравітаційних хвиль

В основу моделювання покладемо рівняння Нав'є-Стокса в трьох вимірах. Маючи на увазі моделювання саме гравітаційних вихрових хвиль для моделювання виберемо такі припущення: 1) сила плавучості домінує в розглядуваних фізичних процесах; 2) вертикальне зміщення парсела (елементу об'єму) повітря не перевищує характерного масштабу зміни густини атмосфери з висотою; 3) горизонтальні варіації термодинамічних змінних на кожній висоті є малими порівняно зі статичними фоновими значеннями. Сукупність цих припущень зменшує складність задачі і відповідає так званому непружному наближенню.

В рамках припущень та виконуючи лінеаризацію рівняння Нав'є-Стокса отримуємо наступну систему рівнянь в циліндричних координатах:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u''}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial u''}{\partial \lambda} - \bar{\xi} v'' = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p''}{\rho_s} \right) \\ \frac{\partial v''}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial v''}{\partial \lambda} + w'' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \bar{\eta} u'' = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{p''}{\rho_s} \right) \\ \frac{\partial w''}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial w''}{\partial \lambda} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p''}{\rho_s} \right) + g \frac{\theta''}{\theta_s} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho_s u''}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_s v''}{\partial \lambda} + \frac{\partial \rho_s w''}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \theta''}{\partial t} + u'' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial \theta''}{\partial \lambda} + w'' \frac{\partial}{\partial z} \theta_s + \bar{\theta} = 0 \end{array} \right. , \quad (1)$$

де $\bar{\xi} = \frac{2\bar{v}}{r} + f$ – модифікований параметр Коріоліса, а абсолютна

завихреність фонового стану є $\bar{\eta} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \bar{v}}{\partial r} + f$. Змінні r, λ, z є радіальна,

азимутальна та вертикальна координати, t – часова змінна; u, v, w є радіальна, азимутальна та вертикальна швидкості; ρ, p, θ – густина, тиск та

потенціальна температура атмосфери у заданій точці; g – гравітаційне прискорення. В рівняннях виконано подвійне перетворення змінних – спочатку виділені малі відхилення термодинамічних змінних від стаціонарного непружного стану за формулами виду $\rho = \rho_s z + \rho' r, \lambda, z, t$, після чого виділені малі відхилення в штрихованих змінних для виконання лінеаризації: $\rho' = \bar{\rho} r, z + \rho'' r, \lambda, z, t$ та інші. Тут вихор описується полями, для яких змінні мають риску, а хвилі – змінними з двома штрихами.

Для розв'язання моделюючої системи рівнянь (1), враховуючи її складність та складність самого явища, було виконано аналіз доступних чисельних методів. Відповідний алгоритм повинен мати достатню точність, великий запас стійкості, задовольняти вимоги консервативності та економічності. Використання явних різницевих схем для чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса неефективне внаслідок жорстких обмежень на співвідношення часового та просторового кроків розрахункової сітки, тому здебільшого застосовують неявні схеми, вільні від таких обмежень або, принаймні, з більш слабкими обмеженнями.

При побудові і реалізації неявних різницевих схем найбільш часто використовують методи факторизації та розщеплення [3], які дозволяють звести розв'язання багатовимірних задач до послідовного розв'язання низки одновимірних задач (або паралельного у випадку обчислювальних систем з паралельною архітектурою).

Існують різницеві схеми, основані на розщепленні вихідної багатовимірної задачі на низку відповідних одновимірних з наступним розщепленням одновимірних задач таким чином, щоб реалізація схем на дробових кроках зводилась до скалярних прогонок. Такі схеми економічні за числом операцій на вузол сітки, є безумовно стійкими або мають слабкі обмеження на стійкість, а вплив розщеплення (яке вносить деяку числову дисипацію) є мінімальним, тобто в цьому сенсі їх властивості близькі до нефакторизованих схем, які, проте, містять неефективні операції з обернення великих матриць.

Було вибрано одну з схем, розроблених В. М. Ковеню [4,5] як реалізації метода розщеплення академіка Н. Н. Яненко. Це схема типу предиктор-коректор з порядком апроксимації $O \tau^2 + h^2$. Спочатку виконується розщеплення матриці системи за фізичними змінними, що дозволяє, як правило, значно спростити задачу. На етапі предиктора використовується метод дробових кроків для системи у дивергентній формі, а для знаходження значень змінних – скалярні прогонок. На етапі коректора, побудованого на недивергентній формі, розв'язок знаходять за

явною схемою. Схема є консервативною при розв'язанні як стаціонарних, так і нестаціонарних задач.

З метою аналізу результатів спроектовано програмний засіб для розрахунку полів швидкостей, тиску та енергії руху хвильових збурень атмосферного повітря в околі модельного атмосферного вихра, а також для візуалізації отриманих результатів в наглядній формі. Алгоритм розв'язання системи реалізовано мовою FORTRAN, причому відповідний виконуваний модуль інтегровано в оболонку сервісної системи, реалізованої в середовищі Delphi.

Висновки

У даній роботі було проведено математичне моделювання вихрових акусто-гравітаційних хвиль. Методи розв'язку, що були обрані і застосовані для моделі, мають декілька переваг (велика точність обчислень, не накопичення похибок при обчисленнях та при округленнях чисел, достатня простота програмної реалізації на комп'ютері).

Отримана математична модель дозволить визначити особливості активного впливу атмосферних вихрових структур на оточуюче середовище. Окрім того, візуалізаційна частина програмного засобу може слугувати як наочний посібник для вивчення відповідних процесів.

Дана модель є основою для подальших досліджень і може бути ускладнена шляхом додавання до неї рівнянь, які допоможуть визначити інші характеристики вихрових хвиль.

Література

1. *Абурджаниа Г. Д.* Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах. – М.: Ком Книга, 2006. – 328 с.
2. *Chimonas G., Hauser H. M.* The Transfer of Angular Momentum from Vortices to Gravity Swirl Waves // *Journal of the Atmospheric Sciences.* – 1997. – Vol. 54. – p. 1701 – 1711.
3. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 553 с.
4. *Ковеня В. М., Лебедев А. С.* Модификации метода расщепления для построения экономичных разностных схем // *Жури, вычисл. математики и мат. физики.* – 1994. – Т. 34, № 6. – С. 886-897.
5. *Ковеня В. М., Слюняев А. Ю.* Модификации алгоритмов расщепления для решения уравнений газовой динамики и Навье-

Стокса // Вычислительные технологии. – 2007. – Т. 12, № 3. – С. 71-86.