УДК 519.63

Д.т.н., проф. Молчанов О.А., к.т.н, с.н.с. Сальніков М.М., магістрант Сірик С.В.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ МАГНІТНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

Abstract

Molchanov A. A., prof.; Salnikov N.N., assoc.prof.; Siryk S.V., m. stud.
Projective methods for MHD equations

The effective modification of combined Petrov-Galerkin method with adaptive and moving grids has been proposed for numerical integration of MHD equations. The practical advantages of proposed method over classical methods have been shown. The ways for further research are proposed as well.

Вступ

Більшість реальних задач фізики плазми включають в себе різноманітні нелінійні явища, динаміку яких навіть у найпростіших випадках важко чи й зовсім неможливо дослідити аналітично. Тому чисельні методи останнім часом переживають стадію бурхливого розвитку, причому, відповідно до розвитку обчислювальної техніки, спостерігається тенденція до розгляду все більш складних та повних нелінійних моделей фізичних явищ [1].

Математично динаміка плазми у першому наближенні описується системою рівнянь магнітної гідродинаміки (надалі скорочено системою *МГД-рівнянь*), що є нелінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних. Рівняння МГД допускають негладкі та розривні розв'язки, що відповідають ударним хвилям, які внаслідок нелінійності та конвективних процесів можуть виникати навіть при дуже гладких початкових та крайових умовах. Врахування конвективних процесів (процесів переносу) зводиться до включення в систему частинних похідних першого порядку по просторовим змінним, що робить задачу несамоспряженою, і є перешкодою для багатьох ефективних чисельних методів (наприклад, варіаційних методів Рітца та Треффца) [2–5].

Важливими з практичної точки зору, але особливо складними для розв'язання, вважаються задачі з домінуючими конвективними членами та малими параметрами біля старших похідних (що відповідають різноманітним дисипативним процесам, наприклад, в'язкості чи розсіюванню) – так звані *сингулярні* крайові задачі [3, 4]. Їх розв'язки відповідають швидкоплинним процесам (наприклад, в аеродинаміці рухам із надзвуковою швидкістю) і можуть стрибкоподібно змінюватись на тонкому перехідному шарі (області ущільнення ударної хвилі), що практично унеможливлює розв'язання таких задач класичними чисельними методами.

Оскільки в процесах переносу значення величин в поточний момент часу залежать лише від значень в попередній момент, то одним із загальних підходів до стабілізації чисельних схем для сингулярних задач є використання апроксимацій проти потоку (upwinding) [2–5]. Так, для рівняння Бюргерса (що структурно схоже на рівняння із системи МГД) в [2] аналізуються та застосовуються різницеві схеми із різноманітними формами апроксимації похідної проти потоку. Іншими ефективними різницевими методами для рівнянь Бюргерса є багатостадійні методи (по типу схем Мак-Кормака [2]), проте їх важко застосувати до систем рівнянь. Хоча згадані схеми й стійкі (звичайно, для явних схем при виконанні обмежень Куранта-Фрідріхса-Леві для кроку по часовій змінній), однак при їх застосуванні часто не вдається досягти необхідної крутизни фронту ударної хвилі, так як схеми можуть "розмазувати" фронт за межі істинного перехідного шару [2].

Розв'язки нелінійних рівнянь, що отримуються проекційними методами Гальоркіна та Петрова-Гальоркіна зі скінченними елементами, можуть бути нестійкими чи мати коливальний характер [2–6], що недопустимо при чисельному інтегруванні. На результуючу стійкість також впливає метод інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР), що отримується під час застосування методів Гальоркіна. Інший підхід до конструювання схем пропонує метод Тейлора-Гальоркіна [2, 5], в якому для уточнення апроксимації похідної по часу використовується повторне диференціювання вихідного рівняння. В залежності від способу апроксимації похідних можна отримати різні модифікації методу Тейлора-Гальоркіна, проте більшість варіантів породжують нестійкість перед фронтом ударної хвилі [2–5].

Існує велика група так званих *безсіткових* проекційних методів [3, 7], в яких для інтерполяції та інтегрування не потрібно (в ідеальному випадку) будувати сітку. До цієї групи методів належить метод "хмарки точок", метод частин цілого, метод локальних інтегральних рівнянь, метод скінченних точок, безсітковий локальний метод Петрова-Гальоркіна, та інші [3–5, 7]. Проте майже всі вони неявно "в фоні" використовують сітку для інтегрування при побудові слабкої форми рівнянь. Лише останні два методи із перерахованих являються істинно безсітковими, проте їхнім дуже суттєвим недоліком являється велика чутливість до вибору точок колокації, що робить їх застосування проблематичним при розрахунку задач із сильними ударними хвилями.

Оскільки дисипативні процеси згладжують розв'язок, то одним із підходів до стабілізації схем являється введення штучної дисипації в схему за напрямом потоку (наприклад, введення штучної дифузії по методу Неймана-Ріхтмаєра [2]), що дозволяє "розмазати" розрив на декілька елементів і, таким чином, використати схеми для розрахунку неперервних потоків. Однак дисипацію доцільно вводити тільки в околі фронту ударної хвилі, що додатково породжує складну задачу відслідковування позиції фронту хвилі. Непогані результати дає використання рухомих сіток, коли в околі фронту вводиться "хмарка" точок, що рухаються в напрямі розповсюдження хвилі [2–4].

Метод Петрова-Гальоркіна також може бути трактований, як введення в схему штучної дифузії, проте при його використанні в багатовимірному випадку разом із дифузією за напрямом потоку виникає також і поперечна дифузія (crosswind diffusion) [3], що відповідає мішаним частинним похідним та псує форму просторового збурення. Для уникнення ефекту поперечної дифузії розроблене сімейство методів SUPG (streamline upwinding Petrov-Galerkin) [3, 8], де штучна дифузія вводиться лише в напрямі характеристик рівняння.

Для протидії розмиванню фронту хвилі можна використовувати різноманітні процедури корекції потоків, що навпаки, ґрунтуються на введенні "антидифузії", а також TVD та ENO методи [2].

В даній праці здійснена спроба розщепити диференціальний оператор задачі на конвективний та дифузійний доданки, де конвективний доданок відповідає за процес переносу вздовж напряму потоку (аналогічно до методу SUPG), а дифузійний доданок – за локальне розсіювання на кожному кроці інтегрування. Запропонований підхід поверхнево схожий на сімейство методів Ейлера-Лагранжа [2, 3, 9], в яких також здійснюється розщеплення оператора задачі (хоча зовсім іншим способом), але на відміну від них зводить задачу до СДРЗ (а не до системи сіткових рівнянь), і для здійснення "дифузійного" кроку не використовує перехід до лагранжевої системи координат чи попереднє розв'язання рівняння переносу [2, 3].

Підхід авторів до просторової дискретизації задачі та отримання СЗДР базується на використанні скінченноелементного методу Петрова-Гальоркіна на рухомих сітках, що дозволяє згущувати сітку в "проблемних" областях та знаходити слабкі (узагальнені) розв'язки крайових задач.

Постановка задачі

Розглянемо стисливу нескінченно провідну плазму. У випадку припущення адіабатичності процесів, що цілком виправдане для більшості реальних фізичних процесів, отримаємо таку векторну систему (в формі Ейлера), що в якості змінних містить лише густину ρ, тиск p, швидкість $\vec{u}$ та магнітне поле $\vec{B}$ [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}), \tag{3}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \vec{g} + \upsilon \cdot \Delta \vec{u} + \vec{F}\,. \tag{4}$$

Тут $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння, μ_0 – магнітна проникливість вакууму (мається на увазі, що рівняння записані в системі СІ), υ – коефіцієнт в'язкості, $\vec{F}$ – сторонні об'ємні сили. Системи (1)-(4), рівнянь стану речовини та заданих крайових умов достатньо для опису довільного явища у фізиці плазми. Задача полягає в розробці та практичній реалізації ефективних методів чисельного інтегрування рівнянь (1)-(4).

Примітка: у багатьох практичних задачах система в початковий момент знаходиться в рівновісному стані, при якому $\vec{u} \equiv 0$, $\partial/\partial t \equiv 0$ і права частина рівняння (4) рівна нулю. Для визначення рівновісного стану слід при вказаних припущеннях прирівняти праву частину рівняння (4) до нуля та скористатись рівняннями стану.

Побудова методів інтегрування

Кожну з невідомих величин, що входять до системи (1)-(4), будемо шукати у вигляді розвинення $\sum_{j=1}^{n} a_j(t) N_j(x)$, де $\{N_j\}$ – сукупність кусково-лінійних базисних функцій з компактним носієм. Згідно методу Петрова-Гальоркіна, слід підставити дані розвинення у систему (1)-(4), помножити отримані співвідношення на вагову функцію W_i, та проінтегрувати на відрізку, де задана система. В результаті отримаємо СЗДР відносно унікального для кожної з невідомих змінних системи (1)-(4) набору $\{a_j(t)\}_{j=1}^{n}$. В якості вагових функцій використовуються функції вигляду

$W_i(x) = N_i(x) + \alpha W_i^*(x)$, де $W_i^*(x)$ – кусково-квадратична функція. Саме наявністю доданку $\alpha W_i^*(x)$ і відрізняється метод Петрова-Гальоркіна від класичного методу Гальоркіна – для останнього число α тотожно дорівнює нулю. Вибір параметра α являється важливим етапом побудови чисельної схеми, оскільки впливає на її стійкість. Відомо [3, 6], що класичний метод Гальоркіна чисельно нестійкий (або слабо стійкий) для задач конвекції-дифузії із переважаючою конвекцією, і породжує коливні розв'язки, в той час як застосування методу Петрова-Гальоркіна дозволяє отримати стійкі схеми. Для рівнянь із нелінійною конвекцією навіть метод Петрова-Гальоркіна породжує нестійкі схеми, тому в запропонованій авторами версії на кожному кроці інтегрування СЗДР відбувається налаштування форми вагових функцій шляхом вибору оптимального значення параметра α [6] із врахуванням розв'язку даних систем, отриманого на попередньому кроці.

Також у СЗДР використовується зосереджена (lumped) [2, 3] апроксимація похідних по часу, що дозволяє покращити стійкість методу. В результаті, ми отримуємо гібридний, проекційно-різницевий метод.

Розглянемо тепер підходи до розщеплення диференціальних операторів в рівняннях (1)-(4). Відомо [2], що рівняння переносу $u_t + au_x = 0$ при $a = const$ має розв'язки типу біжучих хвиль: $u = g(x - at)$, де функція $g(\cdot)$ задає профіль хвилі, що рухається зі швидкістю a. Відповідно, якщо відомий розв'язок задачі в момент t_0, то в момент $t_0 + h$ його можна знайти шляхом зсуву розв'язку в момент t_0 на величину ah. Подібний принцип можна використовувати і до рівнянь з нелінійною конвекцією типу рівняння Хопфа $u_t + uu_x = 0$, оскільки його розв'язок можна знайти в формі $u(x,t) = g(x - ut)$ (але в даному випадку можливе перекидання фронту хвилі, і тоді розв'язок стає неоднозначним). Кожне з рівнянь (1)-(4) має подібну структуру. Відповідно до сказаного, спочатку на кожному кроці інтегрування СЗДР розв'язок, отриманий на попередньому кроці, зміщується в напрямі потоку на деяку величину (пропорційну швидкості та кроку інтегрування), і таким чином отримується проміжний розв'язок, до якого потім застосовується процедура розсіювання. Власне інтегрування СЗДР для рівнянь (1)-(4) зводиться лише до врахування неконвективних членів системи.

Для адекватного відображення конвективних процесів алгоритм використовує рухому сітку, в якій точки згущуються в околах неоднорідностей та фронтів хвиль. На кожному кроці сітка переміщується разом із потоком. Іншим варіантом реалізації є інтерполювання проміжного розв'язку на фіксованій сітці.

Висновки

В даній праці запропоновані модифікації стандартного методу Петрова-Гальоркіна, що дозволяють чисельно інтегрувати нелінійні сингулярні крайові задачі, практично нерозв'язні іншими проекційними та різницевими методами. Основна ідея модифікацій полягає в запропонованих нових методах розщеплення диференціального оператора задачі на конвективний та дифузійний доданки, та врахуванню їх послідовної дії на розв'язок в кожний момент часу для отримання розв'язку в наступний момент. Для адекватного відображення неоднорідностей та ударних хвиль алгоритм використовує адаптивні рухомі сітки.

Розрахунки підтверджують високу точність та чисельну стійкість запропонованих методів.

В подальшому планується розробка процедур корекції потоків (по типу відомих процедур Боріса-Бука, Сода, Лонера) [2–5] для запропонованих методів.

Література

1. *Gombosi T.I. et al.,* Solution Adaptive MHD for Space Plasmas: Sun-to-Earth Simulations // CSE, vol. 6 (2), 2004, pp. 14-35.
2. *Finlayson B.A.* Numerical methods for problems with moving fronts. – Seattle, Washington USA: Ravenna Park Publishing, Inc., 1992. – 613 p.
3. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
4. *Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M.* Numerical Treatment of Partial Differential Equations. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. – 596 p.
5. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 3: Fluid Dynamics.– Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 334 p.
6. *Salnikov N.N., Siryk S.V., Tereshchenko I.A.* On construction of finite-dimensional mathematical model of convection-diffusion process with usage of the Petrov-Galerkin method // Journal of Automation and Information Sciences, vol. 42 (6), 2010, pp. 67-83.
7. *Lin H., Atluri S.N.* Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Convection-Diffusion Problems // CMES, vol. 1 (2), 2000, pp. 45-60.
8. *Russo A.* SUPG vs. residual free bubbles // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol (195), 2006, pp. 1608-1620.

9. *Wang H., Wang K.* Uniform estimates for Eulerian-Lagrangian methods for singularly perturbed time-dependent problems // SIAM J. Numer. Anal., vol. 45, 2007, pp. 1305-1329.