

Д.т.н., професор Зайцев В.Г., магістрант Донде Я.В.

Національний технічний університету України  
«Київський політехнічний інститут»

## АЛГОРИТМ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ПОВЕДІНКИ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ У ЧАСІ

### Abstract

*Volodymyr G. Zaitsev, prof., DSc; Yana Donde, master  
Algorithm of interaction of two-dimensional vortex pair with moveable  
incompressible media*

*Problem of a two-dimensional vortex pair with a sliding layer of constant thickness with uniform intensity distribution derived from the practical problems associated with the terms of aircraft take off in the first minutes clear of the runway. This paper is an exact solution of the problem based on solving two-dimensional Navier-Stokes equations with a given initial distribution of the velocity field. Obtaining solutions are compared and analyzed to create a simple but adequate model of the real flow of air that can be applied in real time.*

### Вступ

Задача аналізу взаємодії двох точкових вихорів має важливе значення для розрахунку моменту злету крупнотонажних літаків.

Найпростішим прикладом руху системи точкових вихорів є задача про рух двох вихорів. Така ситуація вперше була розглянута ще в роботі Г.Гельмгольца (1867). Результатами її розв'язку є наступні три траєкторії.

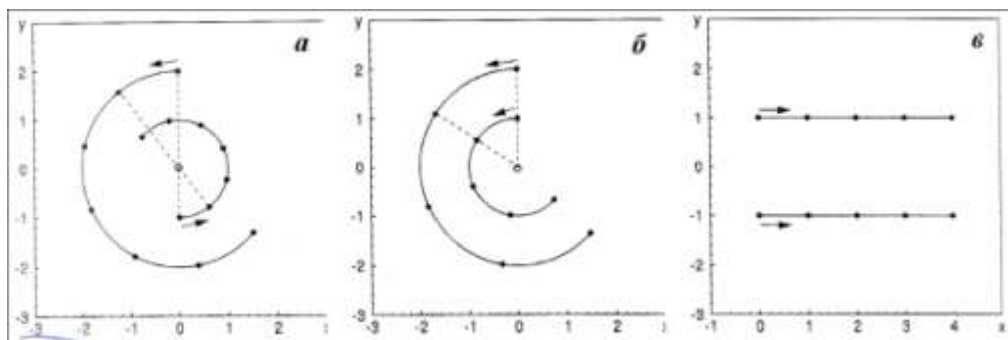


Рис. 1. Траєкторії взаємодії двох точкових вихорів:

- а) вихорі з різними по знаку інтенсивностями; б) вихорі з однаковими по знаку інтенсивностями; в) вихорі з однаковими по модулю, але з протилежними по знаку, інтенсивностями

Модель вихрової пари часто використовується для теоретичного опису явища розвитку вихрового руху, яке формується зривом кінцевих вихорів з крил.

### Постановка задачі

Розглянемо рух в'язкої двовимірної нестискуваної рідини з густиною  $\rho$  і в'язкістю  $\nu$  над твердою поверхнею  $z = 0$ . Нехай в початковий момент часу на деякій висоті знаходиться пара вихорів з локалізованою завихреністю, центри яких мають координати  $(x_1, z_1)$  і  $(x_2, z_2)$ . Припускається, що в початковий момент часу  $t = 0$  розподіл поля швидкості  $U(x, z, 0)$  і, відповідно, поле вихрів  $\omega(x, z, 0)$  відомі. Необхідно визначити еволюцію вихрової пари в часі.

Руху в'язкої, однорідної, нестискуваної рідини задовольняє векторне рівняння, що відповідає закону збереження кількості руху, та рівнянню нерозривності:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{U}, \text{ де} \quad (1)$$

$\nabla$  — оператор Гамільтона,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $p$  — тиск,  $\rho$  — густина рідини,  $U = [U_x(x, z, t), U_z(x, z, t)]$  — поле швидкості.

Задача вирішується при наступних початкових умовах: розподілення поля швидкості течії та розподілення поля швидкості в кожному з вихрів, що складають вихрову пару:

$$U(x, z, 0) = U^{(0)}(x, z), \quad U_\omega(x, z, 0) = U_\omega^{(0)}(x, z) \quad (2)$$

Варто визначити також граничні умови над поверхнею і в безкінечності, які можна записати у вигляді:

$$U(x, 0, t) = 0, \quad U(x, z, t) = 0, \text{ при } (x \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Експериментальні дані показують, що після злету важких літаків розподілення завихреності в виникаючій парі вихрів добре співпадає з розподіленням поля завихреності у вихорах Лемба-Озеена, де поле швидкості  $U_\omega$  має лише кільцеву складову, яка може бути представлена у вигляді:

$$V_\theta(r) = \frac{V^{(0)}}{2\pi r} \left( 1 - \exp \left[ -\beta \left( \frac{r}{r_c} \right)^2 \right] \right) \quad (4)$$

$r$  — відстань від центра вихра до точки поля, що розглядається;

$r_c$  — характерний розмір вихра;

$V^{(0)}$  — характерне значення швидкості.

Початкове розподілення поля швидкості течії повітря над поверхнею землі можна представити в наступному вигляді (5).

Воно представляє собою зсувну течію в шарі висотою  $h$ , центр течії розташований на висоті  $Z$ .  $U^{(0)}$  — максимальне значення швидкості потоку

над зсувним шаром,  $U_x^{(0)}(z)$  — функція, що описує початкове розподілення швидкості в шарі. Поле швидкості представляє собою неперервну функцію, її значення у точках злому:

$$U^{(0)}(Z-h/2)=0; U^{(0)}(Z+h/2)=U^{(0)}.$$

$$U_x(x, z, 0) = \begin{cases} 0, 0 < z \leq Z - h/2 \\ U_x^{(0)}, Z - h/2 < z \leq Z + h/2 \\ U^{(0)}, z > Z + h/2 \end{cases} \quad (5)$$

$$U_z(x, z, 0) = 0$$

## Результати програмування

На рис. 2а представлені результати числового моделювання реальної взаємодії двох однакових вихрів з інтенсивностями  $\Gamma = 250\text{м}^2/\text{с}$ , що рознесені в початковий момент часу на відстань  $b = 25\text{м}$ , завихреність яких сконцентрована в круговій області радіусом  $\sigma = 16.6\text{м}$ .

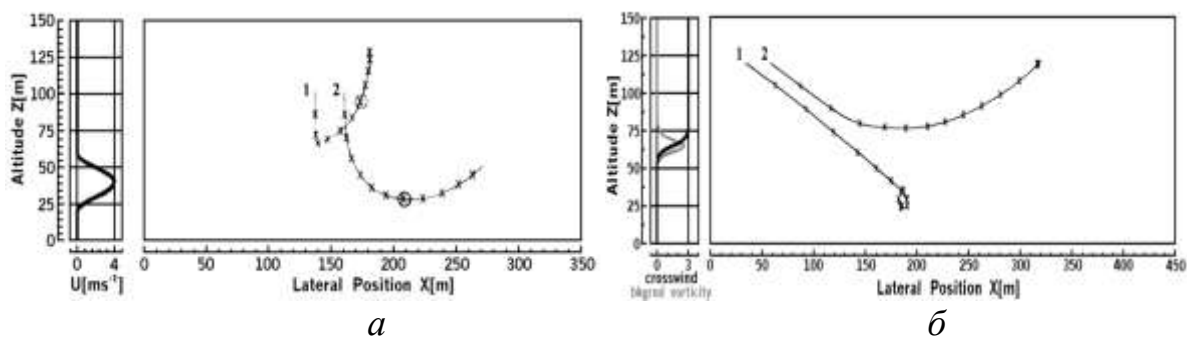


Рис. 2. а) результати числового моделювання реальної взаємодії двох однакових вихрів; б) результати числового моделювання реальної взаємодії двох однакових вихрів зі змінним профілем зсувного шару

З самого початку зсувний шар представляє собою горизонтальний повітряний потік на висоті  $Z=40\text{м}$  з загальною висотою  $h = 60\text{м}$  і максимальною швидкістю в середній частині шару  $\max \{U_x^{(0)}\} = 4\text{м}$ . Положення вихорів через рівні відрізки часу  $\Delta t = 10\text{с}$  відмічені на малюнку хрестиками.

Вихрова пара спочатку рухається в напрямку земної поверхні. З часом вихор 1 зі знаком інтенсивності, що співпадає зі знаком завихреності зсувного шару, починає взаємодіяти і призупиняється при  $t \approx 30\text{с}$ . З іншої сторони вихор 2 проскакує вихровий шар. Потім він починає взаємодіяти з поверхнею, в результаті чого вихор зноситься по течії, залишаючись весь час під шаром. В той же час вихор 1 виштовхується шаром і рухається вертикально вгору, покидаючи зону взаємодії. Положення вихорів при  $t =$

70с відмічені на малюнку кружечками. Числовий приклад показує, що пара вихорів за час  $t \approx 100..120$  с фактично покидає зону взаємодії, при цьому вихор 2 проходить відстань біля 100м, а вихор 1 піднімається на висоту до 125м.

Аналогічний випадок взаємодії розглянутий на рис.2б. Тепер початковий профіль швидкості зсувного шару трошки змінений, інші параметри лишаються тими ж.

Якісна картина взаємодії в цьому випадку не змінилась. Спостерігається глобальне зміщення вихорів вздовж потоку. Вихор 2 залишається над шаром і з достатньо великою швидкістю покидає зону взаємодії за рахунок утворення вихрової пари зі зсувним шаром. Вихор 1, проскочив під шар, залишається під шаром, практично не переміщаючись.

Цікаво відмітити, що при лінеаризації профілю швидкості зсувного шару якісна картина взаємодії (особливо на початковій стадії), вихрової пари з шаром не міняється (рис.3).

Початкові дані в цьому випадку відповідають минулому випадку, представленому на рис.2б. Приведений приклад дозволяє зробити висновок, що при взаємодії вихрової пари із шаром структура профілю швидкості не чинить суттєвого впливу на еволюцію вихрової пари.

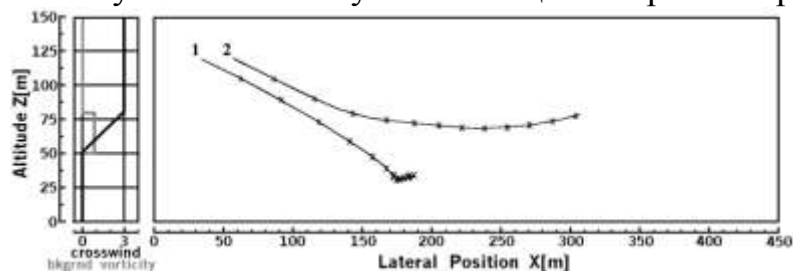


Рис.3. Результати числового моделювання реальної взаємодії двох однакових вихорів з лінійним профілем зсувного шару

## Висновки

Проведенні дослідження показують, що модель ідеальної нестиснуваної рідини може бути використана для якісного аналізу процесу взаємодії вихрової пари із зсувним повітряним шаром над поверхнею землі. Деякі відмінності в еволюції вихрової пари, особливо на заключній стадії взаємодії, пояснюються впливом в'язкості середовища. На початкових фазах взаємодії, які включають в себе наближення вихрової пари до зсувного шару, проникнення під шар одного з вихорів, відскакування другого вихору від шару, в'язкі ефекти принципового значення не мають.

## Література

1. *Zheng Z. C., Baek. K.* Shear-layer effects on trailing Vortices. AIAA 98-0316, 36th Aerospace Science meeting and exhibit, 12-15 January. – 1998. – Reno, USA. – 9 p.
2. *Lamb. H.* Hydrodynamics. Dover publ. – 1945. – 928 p.
3. *Марчук Г. И.*, Методы вычислительной математики. – М.: Наука. – 1989. – 668с.
4. *Roache P. J.* Computational fluid dynamics. Hermosa publ. – 1976. – 616p.