УДК 519.718

Д.т.н., професор Романкевич О.М., студент Шурига О.В.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ПРО ОЦІНКУ КІЛЬКОСТІ ВЕКТОРІВ, ЩО БЛОКУЮТЬСЯ ПРИ МОДИФІКАЦІЇ ОДНІЄЇ РЕБЕРНОЇ ФУНКЦІЇ GL-МОДЕЛІ

Abstract

Olexiy Romankevich, prof., DSc; Shuryga Alexey, student
About the quantity estimate of blocked vectors by modification of one edge function of GL-model

This paper examines GL-model of 3-fault-tolerant multiprocessor system which is also tolerant to some four faults. The transformation of the model by modifying edge functions is considered. The expression for quantity calculation of blocked system state vectors by modification of one edge function is given. This estimate can be used for choosing appropriate edge function for modification.

Вступ

Багатопроцесорні системи знаходять все більше застосування в управлінні складними об’єктами. Звичайно такі об’єкти можуть становити потенційну небезпеку, у зв’язку з чим до надійності систем управління пред’являються високі вимоги, які можуть бути досягнуті такою організацією системи, коли вона залишається роботоздатною при відмові деякої множини її елементів. Такі системи називають відмовостійкими багатопроцесорними системами (ВБС). ВБС, що стійкі до m та менше відмов, називають m-відмовостійкими багатопроцесорними системами.

Розрахунок надійності ВБС може виконуватися аналітичними методами або методами, що базуються на проведенні статистичних експериментів з математичними моделями ВБС, які відображають поведінку системи в потоці відмов. У роботі зупинимося на графологічній моделі (GL-моделі) [1], методи розрахунку надійності з використанням якої відрізняються від інших універсальністю й ефективністю.

GL-модель ВБС, що складається з n елементів, являє собою граф, кожному ребру якого приписана булева функція, що залежить від індикаторних змінних x_i $(i = 1,\ldots,n)$. Змінна $x_i = 0$, якщо i-й елемент системи відмовив, та $x_i = 1$ в протилежному випадку. Ребро видаляється з графу, якщо відповідна реберна функція приймає нульове значення. Зв'язності графу відповідає роботоздатність ВБС. Далі вектор, елементами якого є значення відповідних індикаторних змінних, будемо називати вектором стану системи (ВСС).

У даній доповіді будемо розглядати модифіковану 3-відмовостійку багатопроцесорну систему, яка стійка також до деякої множини 4-х кратних відмов. GL-модель, що відображає роботоздатність такої ВБС, може бути отримана за допомогою модифікації GL-моделі 3-відмовостійкої багатопроцесорної системи шляхом введення додаткових ребер або модифікації реберних функцій. Перший підхід має ряд недоліків, зокрема, ускладнюється визначення зв'язності графу GL-моделі, тому в доповіді зосередимося на другому підході.

Існує багато видів GL-моделей, що відрізняються як графом, так і способом формування реберних функцій, але зупинимося на модифікації функцій так званої 2р-моделі [2], оскільки вони мають меншу складність обчислення в порівнянні з функціями інших моделей.

Згідно [3] 2р-модель розглянутої ВБС втрачає 2 ребра на векторі стану системи з 4-ма нулями, тобто 2 реберні функції приймають нульове значення. Оскільки граф даної моделі циклічний, то достатньо модифікувати одну реберну функцію, для того, щоб граф не втрачав зв'язність, тобто модель відображала роботодатність ВБС на такому векторі. Причому функція, що модифікується, на цьому векторі повинна приймати одиничне значення. Такі вектори далі будемо називати заблокованими векторами.

Постановка задачі

2р-модель має різні реберні функції, і, відповідно, різна кількість векторів може бути заблокована при їх модифікації. Тому, для того, щоб заблокувати певну кількість векторів за допомогою модифікації однієї реберної функції, необхідно вибрати відповідну реберну функцію. Очевидно, що цією функцією буде така функція, після модифікації якої максимально можлива кількість заблокованих векторів буде не менше необхідної. Виходячи з цього, корисно мати оцінку максимальної кількості векторів, що блокуються модифікацією однієї функції.

Оцінка кількості векторів

Згідно з побудовою 2р-моделі [4] реберні функції моделі 3-відмовостійкої ВБС можуть приймати чотири види:

1) $f = g(3,\alpha_1)$, $|\alpha_1| = 3$;

2) $f = g(2,\alpha_1) \vee g(1,\alpha_2)$;

3) $f = g(1,\alpha_1) \vee g(2,\alpha_2)$;

4) $f = g(3,\alpha_2)$, $|\alpha_2| = 3$,

де $g(m,\alpha_i)$ – деякий булевий вираз, що приймає нульове значення, коли дорівнюють нулю хоча б m змінних із множини α_i ($m \le |\alpha_i|$).

Нехай $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ – множина індикаторних змінних, від яких залежить реберна функція. Тоді якщо $|\alpha| = 2n$, тобто парне число, то виходячи з побудови моделі $|\alpha_1| = |\alpha_2| = n$. Якщо $|\alpha| = 2n+1$ – непарне, то $|\alpha_1| = n+1$ і $|\alpha_2| = n$.

Перша й четверта функції можуть приймати нульове значення тоді і тільки тоді, коли дорівнюють нулю всі три елемента ВСС, від яких залежать функції. Отже, функції будуть приймати нульове значення на $(N-3)$ векторах з 4-ма нулями, де N – кількість елементів ВСС.

Спочатку визначимо максимальну кількість ВСС з 4-ма нулями, які можна заблокувати модифікацією однієї функції другого виду у випадку, коли $|\alpha|$ – парне число. Розглянемо всі можливі види ВСС, що містять 4 нуля, на яких функція приймає нульове значення.

1. Дорівнюють нулю дві змінні, від яких залежить вираз $g(2,\alpha_1)$, і одна змінна, від якої залежить вираз $g(1,\alpha_2)$. Від четвертої індикаторної змінної, яка дорівнює нулю, функція не залежить. Кількість таких ВСС можна визначити наступним чином:

$$C_1 = C_{N-2n}^1 C_n^2 C_n^1 = (N-2n)\frac{n!}{2!(n-2)!}n = \frac{1}{2}(N-2n)(n-1)n^2.$$

2. Дорівнюють нулю три змінні, від яких залежить вираз $g(2,\alpha_1)$, і одна змінна, від якої залежить вираз $g(1,\alpha_2)$. Кількість таких ВСС виражається формулою:

$$C_2 = C_n^3 C_n^1 = \frac{n!}{3!(n-3)!}n = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n^2.$$

3. Дорівнюють нулю дві змінні, від яких залежить вираз $g(2,\alpha_1)$, і дві змінні, від яких залежить вираз $g(1,\alpha_2)$. Кількість таких ВСС:

$$C_3 = C_n^2 C_n^2 = \left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2 n^2.$$

Таким чином, якщо G_1 – загальна кількість ВСС з 4-ма нулями, на яких функція другого виду приймає нульове значення, то:

$$G_1 = C_1 + C_2 + C_3 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(N - 2n\right)\left(n-1\right)n^2 + \frac{1}{6}\left(n-2\right)\left(n-1\right)n^2 + \frac{1}{4}\left(n-1\right)^2 n^2 =$$

$$= \frac{1}{12}n^2\left(n-1\right)\left(6N - 7n - 7\right).$$

Зауважимо, що у випадку, коли $|\alpha|$ – парне число, отримана оцінка має місце й для функції третього виду.

Зупинимося тепер на випадку, коли $|\alpha|$ – непарне. Розглядаючи аналогічно викладеному вище всі можливі види ВСС з 4-ма нулями, на яких функція другого виду приймає нульове значення, одержимо загальну кількість таких векторів:

$$G_2 = \frac{1}{12}\left(n-1\right)n\left(n+1\right)\left(6N - 7n - 10\right).$$

Легко показати, що для непарного $|\alpha|$ для функції третього виду справедливо:

$$G_3 = \frac{1}{12}n^2\left(n+1\right)\left(6N - 7n - 11\right).$$

Висновки

Таким чином, можна відзначити наступне: максимальна кількість ВСС, які можуть бути заблоковані при модифікації різних реберних функцій GL-моделі, – різна, і при цьому максимальна кількість заблокованих векторів може бути досягнута шляхом модифікації функцій, які залежать від всіх індикаторних змінних.

Література

1. *Романкевич А.М.* Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем / А.М. Романкевич, Л.Ф. Карачун, В.А. Романкевич // Электронное моделирование. - 2001.-т.23, №1.- с.102-111.
2. *Романкевич А.М.* Частный случай граничных оценок при построении и преобразовании GL-модели/ А.М. Романкевич, В.А. Романкевич, И.В. Майданюк. // Радіоелектронні і комп‘ютерні системи.-№6, 2010, с.236-243

3. *Майданюк И.В.* Об одном свойстве GL модели с минимальным числом теряемых ребер / И.В. Майданюк, К.В. Морозов, Е.Р. Потапова, А.В. Шурига // Науковий вісник Чернівецького університету. Серія : Комп’ютерні системі та компоненти. – 2010. – Т.1, № 2. – С.72-81.
4. *Романкевич В. А.* GL-модель поведения отказоустойчивых многопроцессорных систем с минимальным числом теряемых рёбер / В. А. Романкевич, Е. Р. Потапова, Бахтари Хедаятоллах, В. В. Назаренко // Вісник НТУУ “КПІ” Інформатика, управління та обчислювальна техніка. 2006. № 45. С. 93-100.