УДК 004.02

К.т.н., доцент Зорін Ю.М., студент Соболевський П.А.

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

АЛГОРИТМ “МУРАШИНИХ” КОЛОНІЙ ДЛЯ ЗАДАЧІ КВАДРАТИЧНИХ ПРИЗНАЧЕНЬ

Abstract

Yuri Zorin, Assoc. Prof., PhD; Platon Sobolevskyi, student
An ant colony optimization algorithm for quadratic assignment problem

The paper describes an ant colony optimization algorithm for the quadratic assignment problem. To improve algorithm efficiency modifications of feromone trails update combined with local search are introduced. The comparative analysis of the algorithm efficiency is carried out.

Вступ

Проблема квадратичних призначень (ПКП) є однією з найскладніших задач комбінаторної оптимізації [1], що відносять до класу NP-складних проблем.

Загалом проблема n-го порядку полягає у знаходженні оптимального розміщення n об’єктів у n можливих місцях розташуваннях цих об’єктів. Формальне математичне визначення ПКП порядку має вигляд.

Задано три матриці, як правило, цілочисельні, кожна з яких має розмірність $n \times n$:

D – матриця відстаней ($D_{i,j}$ – відстань між місцями розташування об’єктів i та j);

F – матриця інтенсивності обміну ($F_{i,j}$ – інтенсивність обміну між об’єктами i та j);

C – матриця вартості розміщення ($C_{i,j}$ – вартість розміщення об’єкту i у j-му місці).

Необхідно знайти таку функцію π (подану у вигляді деякої перестановки n чисел від 1 до n), що задає відповідність між номерами об’єктів та номерами місць розташувань цих об’єктів таким чином, щоб функція вартості призначення

$$\text{cost}(\pi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{i,j} \cdot F_{\pi(i),\pi(j)} + \sum_{k=1}^{n} C_{k,\pi(k)}$$

мала б мінімальне значення, причому другий доданок найчастіше ігнорують, оскільки його обчислення має порядок O(n) і тому не суттєво впливає на загальну обчислювальну складність.

Постановка задачі

Метою роботи є розробка модифікації базового алгоритму оптимізації мурашиних колоній (ОМК) для розв’язання ПКП, що полягає у використанні вдосконалених операцій роботи з матрицею інтенсивності мурашиних слідів (МІС).

Базовий варіант алгоритму ОМК для ПКП

Суть алгоритму ОМК полягає у моделюванні поведінки мурах, що шукають оптимальні шляхи між деякими вершинами графу. Знаходження оптимального розв’язку ПКП представляє собою ітеративний процес, на кожній з ітерацій якого кожна з мурах шукає свій власний розв’язок задачі. По аналогії з реальними мурахами, що залишають на обраному шляху спеціальну речовину, що має назву феромон, при знаходженні мурахою деякого розв’язку ПКП (що, як було зазначено, представляє собою n пар цілих чисел) до кожного з елементів матриці τ інтенсивності слідів додається величина $\Delta\tau_{i,j}$, що розраховується за формулою:

$$\Delta\tau_{i,j} = \begin{cases} 1/_{C^s}, \text{якщо пара } (i,j) \text{ входить у розв}'\text{язок}, \\ 0, \text{в інших випадках}, \end{cases} \tag{1}$$

де C^s - це вартість знайденого розв’язку.

Початковим значенням кожного з елементів матриці τ у базовому варіанті алгоритму є випадкова мала величина.

Крім цього, аналогічно випаровуванню феромонів з часом, що спостерігається у реальній дійсності, після кожної ітерації кожен з елементів МІС τ домножується на коефіцієнт інтенсивності випаровування ρ, ρ ∈ (0, 1).

Таким чином для довільного елементу матриці справедлива наступна формула:

$$\tau_{i,j}(t) = \rho\tau_{i,j}(t-1) + \Delta\tau_{i,j}(t), t = \overline{1,..m}, \tag{2}$$

де t – номер поточної ітерації, m – загальна кількість ітерацій.

Алгоритм пошуку розв'язку ПКП

Для оцінки ймовірності включення деякої пари (i, j) до поточного розв'язку ПКП аналізують дві величини:

1) евристична оцінка оптимальності включення пари (i, j) (позначимо її $\eta_{i,j}$);

2) оцінка оптимальності відповідно до інформації з попередніх ітерацій (МІС).

Для евристичної оцінки оптимальності вибору пари (i, j) $\forall\, i, j = \overline{1,..n}$ до виконання власне ітеративного процесу пошуку розв'язків необхідно на основі вхідних даних сформувати матрицю евристичної оцінки A. Для цього необхідно виконати такі дії: 1) сформувати вектори d та f розмірністю n, що формуються за законом

$$d_j = \sum_{i=1}^{n} D_{i,j}\,, f_k = \sum_{i=1}^{n} F_{k,j}\,, \forall\, i, k = \overline{1,..n}$$

2) отримати матрицю A за формулою

$$A = d \cdot f^T$$

Величину $\eta_{i,j}$ $\forall\, i, j = \overline{1,..n}$ розраховують як величину, обернену до елемента матриці $A_{i,j}$:

$$\eta_{i,j} = 1/A_{i,j}.$$

Загальна формула ймовірності включення пари (i, j) до розв'язку має наступний вигляд:

$$p_{i,j}(t) = \begin{cases} \dfrac{\left[\tau_{i,j}(t)\right]^{\alpha} \cdot \eta_{i,j}^{\beta}}{\sum_{k=1, k\,\notin\gamma}^{n} \left[\tau_{i,k}(t)\right]^{\alpha} \cdot \eta_{i,k}^{\beta}}, j \notin \gamma, \\ 0, \text{інакше}, \end{cases}$$

де γ – множина номерів попередньо зайнятих місцеположень об'єктів, α та β – параметри, що задають співвідношення між приорітетами відповідно евристичної оцінки та інтенсивності сліду.

Вдосконалення операцій роботи з МІС

Базовий варіант алгоритму має суттєві недоліки. Першим є те, що після деякої кількості ітерацій в матриці з'являються елементи, значення яких значно більше інших, внаслідок чого унеможливлюється пошук нових розв'язків. Другим є той факт, що внаслідок впливу на МІС всіх розв'язків, отриманих на протязі ітерації, сповільнюється збіжність алгоритму.

Для покращення роботи алгоритму застосовано такі модифікації на етапі роботи з МІС.

1) Введення обмежень на інтервал значень елементів МІС.

2) Введення "перезавантаження" МІС після деякої кількості ітерацій, протягом яких не відбулося зміни найкращого зі знайдених мурахами розв'язків за ітерацію.

3) Перед виконанням "перезавантаження" роблять спробу покращення поточного розв'язку за допомогою алгоритмів локального пошуку (наприклад, алгоритмом імітації відпалу [3]).

4) На кожній з ітерацій на МІС впливає лише найкращий з отриманих мурахами розв'язок, в той час як базовий алгоритм передбачає вплив на цю матрицю всіх отриманих розв'язків.

5) Якщо величина $\Delta\tau_{i,j}$ (1), є нульовою, то вважають, що коефіцієнт інтенсивності випаровування мурашиних слідів ρ (2) дорівнює 1; таким чином, формула (2) для цього випадку набуває вигляду

$$\tau_{i,j}(t) = \tau_{i,j}(t-1), t = \overline{1,..m}.$$

Результати

Розроблений алгоритм показав ефективні результати для ПКП порядку 10-25 в порівнянні з класичним алгоритмом локального пошуку та алгоритмом імітації випалу, а також з базовим алгоритмом ОМК. При цьому в деяких випадках успішним виявилось використання комбінації модифікації ОМК й алгоритмів локального пошуку. Були визначені оптимальні параметри алгоритму: кількість мурах – 25-40, співвідношення приорітетів оцінки з МІС та евристичної оцінки – 0.75-0.8, коефіцієнт інтенсивності випаровування – 0.98, період реініціалізації – 300 ітерацій. В подальшому доцільним є дослідження можливостей вдосконалення операції "перезавантаження" МІС.

Література

1. *Koopmans T.C., Beckmann M.J.* Assignment Problems and the Location of Economic Activities.// Econometrica. – 1957, № 25. pp. 53-76.
2. *Dorigo M., Stu¨tzle T.* Ant Colony Optimization. – The MIT Press. – 2004. – 321p.
3. *Rutenbar R.A.* Simulated Annealing Algorithms : An Overview. //IEEE Circuits and Devices Magazine. – 1989, Vol 5, №1 , pp. 19-26.