УДК 519.711

К.т.н., доцент Романкевич В.О.,
аспірант Фесенюк А.П., студент Слюсар Є.В.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ОДИН ПІДХІД ДО ОЦІНКИ ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ НАДІЙНОСТІ ВБС, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ ІЄРАРХІЧНИМИ GL-МОДЕЛЯМИ

Abstract

Vitaliy O. Romankevich, assoc. prof., PhD;
Andriy Fesenuk, postgraduate; Evgeniy Slusar, student
The method for error estimation of reliability computation of fault-tolerant systems described with hierarchical GL-models

This paper concerns the reliability computation of fault-tolerant systems using hierarchical GL-models. A brief introduction to hierarchical GL-models is given. The method of reliability computation error estimation using density distribution of product of random variables is proposed. The technique for finding density distribution of product of random variables is shown.

Вступ

Задача розрахунку надійності відмовостійких багатопроцесорних систем (далі – ВБС) є досить актуальною та має суттєве наукове та технічне значення. ВБС використовуються в технічних системах, які мають високі вимоги щодо їхньої надійності. Наприклад, такими є інформаційні системи управління в енергетичній промисловості, системи управління авіаційною та космічною технікою та ін.

В роботі [1] для моделювання поведінки ВБС у потоці відмов було запропоновано спеціальний тип математичних моделей – GL-моделі. Також в роботі [2] були запропоновані алгоритми обчислення надійності ВБС за допомогою статистичних експериментів. Алгоритми базуються на моделюванні поведінки ВБС у потоці відмов (для цього використовується GL-модель): в процесі експерименту збирається статистика роботи ВБС, на основі якої обчислюються параметри надійності ВБС.

Статистичний експеримент полягає в моделюванні певної випадкової величини. Випадкова величина будується таким чином, що її математичне сподівання дорівнює точному значенню надійнісного параметра, що обчислюється. Маючи функцію щільності розподілу випадкової величини, можна зробити оцінку похибки розрахунку. Для цього будується довірчий інтервал, про який можна стверджувати, що змодельовані значення випадкової величини потрапляють в інтервал з достатньо високою імовірністю. Під час використання цього методу виникає задача визначення функції щільності розподілу випадкової величини, що моделюється.

В роботі [3] вводиться новий тип GL-моделей – ієрархічні GL-моделі. Сутність ієрархічних GL-моделей полягає у представленні ВБС як системи, що включає в якості елементів підсистеми нижчого рівня. Проста GL-модель реалізує структурну функцію ВБС:

$$X = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де X – подія, яка полягає у справності (тобто перебуванні у роботоздатному стані) всієї ВБС, x_i – подія, що відповідає справності i-того елементу ВБС. У випадку ієрархічної GL-моделі структурну функцію можна представити у вигляді

$$X = f(F_1, F_2, \ldots, F_m),$$

$$F_i = f_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{n(i)}),$$

де F_i – подія, що відповідає справності i-тої підсистеми, f_i – структурна функція i-тої підсистеми, $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{n(i)}$ – множина елементів, що входять до i-тої підсистеми, $n(i)$ – кількість елементів в i–тій підсистемі. Якщо F_i та F_j – незалежні події, відповідні підсистеми називають незалежними.

У якості основного показника надійності будемо розглядати імовірність безвідмовної роботи ВБС за певний проміжок часу T, як такий показник, з якого можна отримати будь-який інший. Для ієрархічної GL-моделі ця величина дорівнює

$$P(X) = P(f(F_1, F_2, \ldots, F_m)). \qquad (1)$$

Якщо структурна функція f нескладна, вираз (1) можна перетворити до вигляду

$$P(X) = g(P(F_1), P(F_2), \ldots, P(F_m)). \qquad (2)$$

де g – відносно проста функція, що може бути задана аналітично за допомогою операцій множення та додавання. Імовірність $P(F_i)$ безвідмовної роботи i-тої підсистеми можна розрахувати в процесі статистичного експерименту за алгоритмом, який описаний в роботі [2]. Але статистичний експеримент не дає точне значення, а моделює випадкову величину. Тому якщо обчислити значення функції g, беручи в якості аргументів $P(F_i)$, отримані в результаті статистичного експерименту, результат буде випадковою величиною:

$$\varepsilon = g(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m).$$

де ε_i (i = 1...m) – випадкова величина, що моделюється в процесі обчислення імовірності $P(F_i)$ в рамках статистичного експерименту. Таким чином, постає задача визначення функції розподілу випадкової величини, яка є сумою чи добутком незалежних випадкових величин. Суми випадкових величин достатньо вичерпно досліджені в роботі [4]. В даній роботі досліджується розподіл добутку випадкових величин.

Постановка задачі

Незалежні випадкові величини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, які моделюються при статистичному розрахунку імовірностей безвідмовної роботи підсистем ВБС, мають функції щільності розподілу $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$, причому $p_i(x)=0$ при $x < 0$, i = 1...n, тобто випадкові величини приймають лише позитивні значення. Визначити функцію щільності розподілу випадкової величини $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$. Визначити похибку обчислення добутку імовірностей безвідмовної роботи підсистем ВБС.

Хід дослідження

Як відомо [4], довірча імовірність відхилення δ значення x випадкової величини X від математичного сподівання $M(X)$ визначається наступним чином:

$$P\left(\left|x - M(X)\right| < \delta\right) = \int_{M(X)-\delta}^{M(X)+\delta} p(x)\,dx, \qquad (3)$$

де $p(x)$ – функція щільності розподілу випадкової величини X.

Співвідношення (3) може бути використане для оцінки статистичної похибки. При цьому математичне сподівання має дорівнювати точному значенню досліджуваної величини, а ширина довірчого інтервалу δ являється оціночним значенням похибки.

В нашому випадку функція щільності випадкової величини $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ не задана в явному вигляді, але вона може бути отримана на основі функцій щільності розподілу $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$.

Розглянемо спочатку випадок n=2. Маємо двовимірний випадковий вектор $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ зі щільністю розподілу

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1)\, p_2(x_2).$$

Функція розподілу випадкової величини $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ дорівнює, за визначенням

$$F(x) = P\{x < x_1 x_2\} = \iint_{D:\, x < x_1 x_2} p_1(x_1)\, p_2(x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Оскільки випадкові величини можуть приймати лише позитивні значення, область інтегрування можна обмежити областю $\{D: x < x_1 x_2, x > 0, x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Тоді інтеграл приймає вигляд

$$F(x) = \int_0^{\infty} \int_0^{x/x_1} p_1(x_1) p_2(x_2) dx_2 dx_1,$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} p_1(x_1) \int_0^{x/x_1} p_2(x_2) dx_2 dx_1,$$

$$F(x) = \int_0^{\infty} p_1(x_1) \left(F_2\left(\frac{x}{x_1}\right) - F_2(0) \right) dx_1.$$

Оскільки випадкова величина ε_2 приймає тільки позитивні значення, $F_2(0) = 0$, і тоді

$$F(x) = \int_0^{\infty} p_1(x_1) F_2\left(\frac{x}{x_1}\right) dx_1.$$

Продиференціювавши ліву та праву частину по x, отримаємо

$$p(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x_1} p_1(x_1) p_2\left(\frac{x}{x_1}\right) dx_1 . \qquad (4)$$

Використовуючи формулу (4), можна обчислювати щільність розподілу добутку випадкових величин. Але на практиці працювати з інтегралами виду (4) не досить зручно. Безпосереднє застосування формули (4) може привести до складних математичних перетворень. Ситуація ще більше ускладнюється у випадку n>2, коли потрібно виконувати перетворення за формулою (4) n-1 раз. Але, як буде показано далі, необхідні перетворення можна значно спростити за допомогою математичного апарату перетворення Мелліна [5].

Перетворення Мелліна відноситься до класу інтегральних перетворень. Для функції, заданій на напівпрямій $(0,+\infty)$, перетворення Мелліна визначається формулою

$$\Re\{f(x); s\} = f^*(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, \; s = \gamma + i\tau .$$

Перетворення ставить у відповідність дійснозначній функції, яка називається оригіналом, комплекснозначну функцію – образ. Зворотне перетворення, тобто визначення оригіналу за образом, визначається наступним виразом:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)x^{s-1}ds,\ \ x>0, \operatorname{Re} s=\gamma .$$

Для перетворення Мелліна визначена операція згортки. Згорткою функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, визначених на $(0,+\infty)$, називається інтеграл

$$(f_1\circ f_2)(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{t}f_1(t)f_2\left(\frac{x}{t}\right)dt .$$

Порівнявши цей вираз з формулою (4), побачимо, що формули визначають однакову операцію. Таким чином, щільність розподілу добутку випадкових величин дорівнює згортці функцій щільності розподілу цих величин:

$$p(x)=p_1(x)\circ p_2(x),$$

або, у випадку $n>2$,

$$p(x)=p_1(x)\circ p_2(x)\circ\ldots\circ p_n(x).$$

Важлива властивість операції згортки полягає в тому, що перетворення Мелліна згортки двох оригіналів дорівнює добутку їх образів:

$$\Re\{(f_1\circ f_2)(x);s\}=f_1^*(s)f_2^*(s)=f^*(s).$$

Таким чином, визначення щільності розподілу добутку зводиться до досить простої операції перемноження образів функцій щільності розподілу:

$$p^*(s)=p^*{}_1(s)p^*{}_2(s)\ldots p^*{}_n(s).$$

Тобто, щільність розподілу добутку випадкових величин можна отримати як оригінал добутку образів функцій щільності розподілу:

$$p(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} p^*{}_1(s)p^*{}_2(s)\ldots p^*{}_n(s)x^{s-1}ds,\ \ x>0, \operatorname{Re} s=\gamma .$$

Висновки

Запропонований метод дозволяє відносно легко визначати функцію щільності розподілу добутку довільного числа випадкових величин. Цей результат може бути використаний для оцінки похибки при розрахунку надійності ієрархічних GL-моделей.

В подальшому доцільно розглянути важливі окремі випадки, зокрема розподіл добутку випадкових величин, що розподілені нормально, та випадкових величин, що визначаються розподілом Стьюдента.

Література

1. *Романкевич А.М.* Графо-логические модели для анализа сложных отказоустойчивых вычислительных систем / А. М. Романкевич, Л. Ф. Карачун, В. А. Романкевич // Электронное моделирование. – 2001. – Т. 23, № 1. – С. 102-111.
2. *Романкевич А.М., Гроль В.В., Карачун Л.Ф., Орлова М.Н., Романкевич В.А.* Об одном подходе к расчёту надёжности отказоустойчивых многопроцессорных систем // автоматизированные системы управления и приборы автоматики. - 2002. - 119.- с.54-58.
3. *Романкевич В.А., Темноход А.В.* Объединение моделей подсистем в рамках графо-логической модели // Збірник тез 2 Всеукраїнської конференції "Людина і космос".- Дніпропетровськ:НЦАОМУ.- 2000.- с.273.
4. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей: Учебник. 7-е изд., исправл.- М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 320 с.
5. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.