УДК 51-73

К.т.н., доцент Россошинський Д.О., магістрант Штацька А.А.

**Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»**

ЗАДАЧА ВЕЙВЛЕТ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ АКУСТО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ В АТМОСФЕРНИХ ХВИЛЕВОДАХ

Abstract

D. O. Rossoshinskiy, assoc. prof., PhD; A.A. Shtatska, graduate student
Task of Wavelet modeling of acoustic-gravity wave expansion in atmospheric wave guides

This paper concerns the problem of modeling of acoustic-gravity wave expansion in atmospheric guides. The most adequate models and asymptotic methods for solving Sturm-Liouville problem are studied. The modified model is proposed for finding smoothed eigenfunctions and eigenvalues for cases, where the system heterogeneity length-scale is much smaller than the size of the domain on which the problem is defined and standard asymptotic methods fail to predict the useful information.

Вступ

Акусто-гравітаційні хвилі (АГХ) спостерігаються на всіх висотах і переносять енергію та імпульс значних атмосферних мас, викликаючи збурення рівноважних станів різних областей іоносфери, можуть ініціювати і модулювати атмосферну конвекцію та пов’язані з нею гідрологічні процеси. За деяких умов в атмосфері виникають шари, які служать як хвилеводи для таких хвиль [1].

Існує декілька моделей, які описують розповсюдження акустичних і гравітаційних хвиль. Пошарові моделі є простими, але не завжди дозволяють достатньо детально описати структуру реальної атмосфери. Моделі неперервної функції передбачають пошук неперервних функцій, які описують розподіл з висотою в атмосфері характеристик (вітер та температура), представлених функціями, для яких можуть бути знайдені точні розв’язки та розв’язки у формі рядів. Такі моделі носять частковий характер. Є моделі, у яких середовище неперервне, розглядаються параметри (коефіцієнти в диференційних рівняннях), що повільно змінюються з висотою, тобто в межах однієї вертикальної довжини хвилі зміни середовища повинні бути незначними. У цьому полягає наближення Вентцеля-Крамерса-Бріллюена [1,2]. Випадок, коли середовище змінюється швидко у вертикальному напрямку, залишається нерозглянутим.

Опис розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль в атмосферних хвилеводах зводиться до крайової задачі Штурма-Ліувілля з рівнянням:

$$L(q,\lambda_n)u_n = 0 \quad (1)$$

та відповідними граничними умовами. У наведеному рівнянні L – оператор Штурма-Ліувілля, $q(x)$ – функція, яка представляє неоднорідність системи, λ_n – власні значення, $u_n(x)$ – власні функції. Можна знайти асимптотичні розв'язки поставленої задачі методом Вентцеля-Крамерса-Бріллюена для випадку, коли коефіцієнти рівняння змінюються повільніше, ніж власна функція, тобто коли виконується:

$$\pi^{-1}|\lambda_n|^{1/2}l >> 1 \quad (2)$$

Груба оцінка найменшого власного значення $|\lambda_1|=(\pi/L)^2$, тут L – розмір області, на якій визначена задача. Оскільки $|\lambda_n|$ монотонно збільшуються з ростом n, то умова (2) завжди може бути виконана для достатньо великих n. Якщо параметри середовища, представлені функцією $q(x)$, змінюються на маленьких масштабах, то у таких середовищах $u_n(x)$ будуть описуватись на великому діапазоні масштабів. Але часто достатньо знати коливання $u_n(x)$ лише на великих масштабах [3].

Постановка задачі

Якщо розглядати реальний атмосферний хвилевод, то він буде неоднорідний, у більш складних випадках містить включення при вдуванні вітру або занесенні туди густих хвилевих систем. Неоднорідність $q(x)$ у таких випадках матиме складну структуру і є функцією, яка швидко змінюється у вертикальному напрямку. Як було сказано вище, у такому випадку існуючі моделі не дозволяють отримати повну інформацію про розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль у атмосферних хвилеводах. Адже моделі, які найбільш адекватно описують реальну атмосферу, розглядають лише параметри, які повільно змінюються з висотою, тобто не дозволяють розглядати неоднорідний хвилевод. Для вирішення цієї проблеми нами пропонується використання багатомасштабного аналізу та теорії вейвлетів. Вейвлети дають можливість знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля, для яких не виконується умова (2).

Задача полягає у знаходженні такої функції $q^{eff}(x)$ – ефективної міри, що відповідає $q(x)$, яка дасть співвідношення такого ж вигляду, що й рівняння (1):

$$L(q^{(eff)}(x),\lambda_n^{'})u_n^s = 0 \quad (3)$$

з відповідними граничними умовами [2, 3]. При цьому $q^{eff}(x)$ повинна мати простішу структуру, а $u_n^s(x)$ є згладжена функцією, яка відповідає $u_n(x)$, і описується на великому масштабі. Таким чином, $u_n^s(x)$ – великомасштабна компонента функції $u_n(x)$, тобто функцію $u_n(x)$ на розділенні k можна представити у вигляді:

$$u_n(x) \approx u_n^s(x) + u_n^d(x),$$

де $u_n^d(x)$ – детальна компонента [4]. $u_n^s(x)$ – локально згладжений або усереднений опис функції на масштабі 2^{-j}, $u_n^d(x)$ описує "дрібні" деталі, які включають поведінку функції на масштабах від $2^{-(j+1)}$ до 2^{-k}. Нехай $\{V_j\}_{j\in Z}$ – послідовність вкладених лінійних просторів, які складають багато масштабний розклад $L_2(R)$. $\varphi(x)$ – масштабна функція, $\psi(x)$ – материнський вейвлет. Визначимо функції $\varphi_{jn}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j - n)$, $\psi_{mn}(x) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n)$. Тоді функції $u_n^s(x)$ і $u_n^d(x)$ можна представити у наступному вигляді:

$$u_n^s(x) = P_j u_n(x) = \sum_n s_n \varphi_{jn}(x),\ s_n = \langle u_n, \varphi_{jn} \rangle$$

$$u_n^d(x) = D_j^k u_n(x) = \sum_{m=j}^{k-1} \sum_n d_{mn} \psi_{mn}(x),\ d_{mn} = \langle f, \psi_{mn} \rangle.$$

При $k \to \infty$ асимптотична рівність стає точною.

Таким чином, ми застосуємо теорію вейвлетів та багатомасштабний аналіз до розв'язання задачі Штурма-Ліувілля, що виникає при моделюванні розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль в атмосферних хвилеводах, і зможемо зняти обмеження, яке накладає метод Вентцеля-Крамерса-Бріллюена. Це дозволить нам описати структуру реального атмосферного хвилеводу й дослідити розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль у такому хвилеводі. Більш того, отримання саме згладженої компоненти власної функції дозволяє розглянути проблему наявності включень у таких хвилеводах.

Побудова моделі розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль на основі вейвлетів.

Якщо задача записана у диференціальній формі (1), то при переході до задачі (2) для неї треба визначити коректні граничні умови. Ця проблема вирішується шляхом переходу за допомогою функції Гріна до рівняння в інтегральному вигляді, яке містить у собі граничні умови, наприклад, до рівняння Фредгольма другого роду. До цього рівняння, у свою чергу був застосований багатомасштабний аналіз:

$$[\Phi - M]u_n^s = 0 \quad (4)$$

У наведеному рівнянні Φ – оператор згладжування, який відповідає великомасштабній компоненті неоднорідності системи, M – ефективний матеріальний оператор (ЕМО), який враховує її детальну частину. Виявляється, що при деякому вигляді граничних умов та функції $q(x)$ можна провести обернені перетворення і перейти від (4) до (3), тобто отримати задачу у диференціальній формі з явно записаними граничними умовами [3]. При цьому найкраще наближення для великомасштабних компонент власних функцій та власних значень повинні отримати, коли відношення найменшого масштабу, на якому змінюється мілкомасштабна компонента власної функція, до масштабу, на якому змінюється отримана великомасштабна компонента власної функції прямує до нуля.

Висновки

Модель розповсюдження акусто-гравітаційних хвиль у атмосферних хвилеводах, отримана із застосуванням теорії вейвлетів та багато-масштабного аналізу, дозволить розглянути хвилеводи складної структури з включенням шляхом зняття обмежень, що накладає метод Вентцеля-Крамерса-Брілюена. Модель ще не реалізована, але з умов застосовності теорії вейвлетів до розв'язання задачі Штурма-Ліувілля випливає, що найкраще наближення для великомасштабних компонент власних функцій та власних значень повинні отримати, коли відношення найменшого масштабу, на якому змінюється мілкомасштабна компонента власної функція, до масштабу, на якому змінюється отримана великомасштабна компонента власної функції прямує до нуля.

Література

1. *Госсард Э.Э., Хук У.Х.* Волны в атмосфере. Инфразвук и гравитационные волны в атмосфере – их возникновение и распространение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 532 с.
2. *Steinberg B.Z., McCoy J.J., Miroznik M.* A multiresolution approach to homogenization and effective modal analysis of complex boundary value problems // SIAM J. Appl. Math. – 2000. – Vol. 60, №. 3. – Pp. 939-966.
3. *Steinberg B.Z.* Homogenization and effective properties formulations for propagation in finely structured laminates – a multiresolution approach // Wave Motion. – 2001. – Vol. 34, №. 3. – Pp. 319-337.
4. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.