УДК 519.635.8

Д.т.н, професор Молчанов О.А.,
к.т.н., с. н. с. Сальніков М.М., студент Терещенко І.О.

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

ВІДНОВЛЕННЯ ЕВОЛЮЦІЇ ПОЛЯ КОЛИВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ В ІОНОСФЕРІ ЗА РЕЗУЛЬТАТАМИ ЛІНІЙНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Abstract

Alexander A. Molchanov, prof.; Nikolai N. Salnikov, assoc. prof.;
Igor A. Tereshchenko, student
Recovering field evolution of oscillating process in ionosphere based on results of linear measurements

This paper concerns the problem of reproducing spatial structure of wave processes in the ionosphere with the use of linear (along the trajectory) satellite measurements. Solution of the problem includes development of approximate finite dimensional mathematical model of the process and application of the observation and later Kalman type filtering algorithms. The complexity of the problem is connected with a large dimension of the approximating model.

Вступ

Основна особливість дослідження фізичних процесів у навколоземному просторі пов'язана, з одного боку, з просторовим характером їх перебігу, а, з іншого боку, з неможливістю здійснити розподілене вимірювання параметрів протікання цих процесів. При вивченні фізичних процесів на Землі (або з Землі), як правило, можна забезпечити стаціонарну розподілену мережу датчиків, що дозволяє одержувати повну інформацію про фізичні поля і відповідно про їх зміну в часі. У космосі неможливо створити стаціонарну мережу датчиків - нерухомий у просторі супутник почне прискорений рух, обумовлений гравітаційними полями. Звичайно, можна створити досить густу мережу супутників, однак це пов'язане з великими матеріальними витратами, складністю управління такою системою, розрахунку і підтримання необхідних траєкторій. В даний час такої можливості немає.

Тому в даний час актуальним завданням є відновлення просторово-часових характеристик процесів, що протікають у навколоземному просторі, на основі вимірювання цих параметрів уздовж траєкторій супутника, що періодично перетинають область дослідження.

Постановка задачі

Більшість процесів, що представляють інтерес, в навколоземному просторі має хвильовий характер. Поперечні розміри області (висота іоносфери від 70 до 250 км) істотно менше ширини і довжини області (близько 500-1000 км). За таких розмірах кривизною атмосфери також можна знехтувати. Об'єктом даного дослідження будуть хвильові процеси в іоносфері Землі. Розглядається задача відновлення просторово-часових характеристик коливального процесу (відхилення параметрів від рівновісного стану та швидкість відхилення), що описується хвильовим рівнянням у колі або в двовимірній плоскій області довільної форми з використанням даних вимірів цього процесу вздовж прямих ліній (траєкторій супутника), що змінюють своє положення відносно області.

У якості базової математичної моделі було вибрано хвильове рівняння – лінійне гіперболічне диференційне рівняння в частинних похідних [1], відоме, як рівняння коливання тонкої мембрани. Це рівняння є першим наближенням до опису гравітаційних та акусто-гравітаційних хвиль, що спостерігаються в іоносфері Землі.

Розглянемо однозв'язну область Ω на площині, на якій введена ортогональна декартова система координат $(x,y),(x,y)\in R^2$. Вважатимемо, що досліджуваний процес описується наступним хвильовим рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{a^2}\Delta u \tag{1}$$

де $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ - оператор Лапласа, $u=u(t,x,y)$ - невідома скалярна функція часу t, $t\in R^1$, та просторових змінних (x,y), $\dfrac{1}{a^2}=v^2$, де v - фазова швидкість. У якості граничних умов візьмемо:

$$u(t,x,y\cdot)\big|_{\Gamma}=u(t,x,y)=0 \quad \forall(x,y)\in\Gamma\ \forall t\geq 0, \tag{2}$$

де Γ - границя області Ω. Початкові умови, функція $u_0(x,y)=u(0,x,y)$ $(x,y)\in\Omega$ - невідома.

Розглянемо рівняння прямої лінії, що проходить через точку з координатами (x_0,y_0):

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\end{pmatrix}\lambda,\ \ \lambda\in R^1 \tag{3}$$

Запишемо рівняння (3) в наступному векторному вигляді:

$$r = r_0 + a\lambda\,, \tag{4}$$

де позначено $r = (x, y)^{\mathrm{T}}$, $a = (a_x, a_y)^{\mathrm{T}}$. Вважатимемо, що в дискретний момент часу $t_k = k \cdot \Delta t$ (Δt - інтервал дискретизації по часу) вздовж лінії

$$L_k = \{r = (x, y) : r = r_{k0} + a_k\lambda,\ \lambda \in R^1\} \tag{5}$$

виміру відома інформація про розв’язок рівняння (1), функція $u = u(t, x, y)$, у наступному вигляді:

$$u_k(r)\big|_{L_k} = u(t_k, x, y)\big|_{(x,y)\in L_k} = u(t_k, r_{k0} + a_k\lambda) \tag{6}$$

Задача полягає у побудові оцінок функцій, $\tilde{u}_k = \tilde{u}(t_k, x, y)$, для розв’язку $u_k = u(t_k, x, y)$ рівняння (1) з використанням результатів вимірів (6) таких, що

$$\left\| u_k - \tilde{u}_k \right\| \to 0 \text{ при } k \to \infty\,. \tag{7}$$

Розв'язок задачі

Розв’язок задачі передбачається здійснити у декілька етапів. На першому етапі з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) побудувати скінченновимірному модель у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимує розв’язок рівняння (1) з необхідною точністю. На другому - записати отримані рівняння в дискретному часі. При цьому вимірювання (6) будуть давати інформацію про значення вектора стану отриманої системи. На третьому - використовувати спостерігач або фільтр [2], щоб продовжити вектора стану системи. Коротко розглянемо ці етапи.

Розіб'ємо область на трикутники, що попарно не перетинаються, які можуть мати спільними тільки вершини та / або ребра. Це розбиття створює сітку розбиття Ω. У відповідності з методом кінцевих елементів [3,4] будемо шукати наближеній розв'язок (1) у вигляді:

$$\tilde{u}(t, x, y) = \sum_i U_i(t) N_i(x, y)\,, \tag{8}$$

де i - номер вузла, $N_i(x, y)$ - відмінна від нуля лише на елементах, до складу яких входить i-ий вузол, в цьому вузлі $N_i(x_i, y_i) = 1$. $N_i(x, y)$ - лінійна на елементі та має скінчений носій відносно всієї області визначення [2]. Для визначення $U_i(t)$ можна отримати наступну систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_i \dot{V}_i \int\limits_S N_i N_j dS = -\dfrac{1}{a^2} \sum\limits_k \sum\limits_i U_i \int\limits_{S_k} \left(\dfrac{\partial N_i}{\partial x} \dfrac{\partial N_j}{\partial x} - \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \dfrac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS, \forall j \\ \dot{U}_i = V_i, \forall i \end{cases}, \tag{9}$$

яку у векторному вигляді можна записати так:

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta & D^{-1}T \\ I & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} \qquad (10)$$

де вектори $V = (V_1, \ldots, V_N)^{\mathrm{T}}$, $U = (U_1, \ldots, U_N)^{\mathrm{T}}$, Θ - нульова $N \times N$ матриця, I - одинична $N \times N$ матриця, елементи матриць D та T визначаються наступним чином:

$$D_{i,j} = \sum_i \int_\Omega N_i N_j d\Omega,\ T_{i,j} = -\frac{1}{a^2} \sum_k \sum_i \int_{\Omega_k} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega$$

Систему рівнянь (10) можна записати в наступному вигляді:

$$\dot{x} = Ax \qquad (11)$$

де вектор $x = (V^{\mathrm{T}}, U^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, а матриця $A = \begin{pmatrix} \Theta & D^{-1}T \\ I & \Theta \end{pmatrix}$.

Рівнянню (11) відповідає наступне рівняння у дискретному часі [5]

$$x_{k+1} = \overline{A} x_k,\ k = 0,1,\ldots,$$

де $x_k = x(t_k)$, матриця $\overline{A}$ будується на основі матриці A та інтервалу дискретизації Δt [5].

Коротко пояснимо. Яку інформацію можна отримати з використанням вимірів (6). Лінія L_k за умовою задачі перетинає область Ω і, відповідно, сітку розбиття (ребра та вершини).Нехай вона проходить через вершину з номером i. Це означає, що можна отримати інформацію про значення коефіцієнта розвинення $U_i(t_k)$.

Позначимо $\|r_l - r_j\|^2 = (r_l - r_j)^T (r_l - r_j)$ квадрат довжини ребра, що з'єднує вершини з номерами j и l. Якщо лінія L_k перетинає це ребро у точці $r_{j,l}$, то можна отримати наступну інформацію про лінійну комбінацію $(1-\mu)U_j(t_k) + \mu U_l(t_k)$, де $\mu = \|r_{j,l} - r_j\| / \|r_l - r_j\|$. Нехай L_k перетинає n_k вершин та ребер сітки розбиття. Тоді отримаємо вектор значень:

$$y_k = C_k x_k$$

Особливість даної задачі полягає в тому, що в залежності від місця проходження ліній L_k буде змінюватись розмірність вектора y_k та відповідно матриці C_k. Для такого випадку найбільш підходить метод спостереження з використанням еліпсоїдів [4].

На основі заданого лінійного перетворення, що зв'язує подальший вектор стану з попереднім, прогнозується оцінка стану системи, віднесена до моменту наступного вимірювання.

Висновки

В результаті розв’язку поставленої задачі були створені алгоритми спостереження з використанням результатів лінійних вимірювань для просторово-часового відновлення фізичних полів, що виникають при хвильових процесах в іоносфері. Другорядним результатом проекту - розробка чисельних методів методи для розрахунку хвильових процесів в іоносфері.

На першому та другому етапах виконання проекту проведено детальний огляд математичних моделей, які використовуються для опису фізичних процесів в іоносфері і, зокрема, для опису хвильових процесів. Зроблено аналітичний огляд методів чисельного розв'язання диференційних рівнянь та розроблено певні їх модифікації.

На третьому етапі підібрано оптимальні методи спостереження вектора стану для систем великої розмірності. Проведено пробні розрахунки на основі розроблених чисельних схем для двовимірних хвильових задач. Отримані результати засвідчили про правильність і коректність розроблених алгоритмів та моделей.

Розроблені в результаті математичні методи, алгоритми і програми будуть використані при розробці аналогічних засобів відновлення просторової картини протікання процесів, що описуються більш складними і більш адекватними рівняннями.

Література

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* – Уравнения математической физики. – 4-е изд.– М.: Мир, 1972 – 710 с.
2. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. – М.:Мир, 1979. – 389 с.
3. *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor.* The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 3: Fluid Dynamics.– Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000. – 795 с.
4. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. – 320 с.
5. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 653 с.