УДК 519.635

Д.т.н., проф. Молчанов О.А., к.т.н, с.н.с. Сальніков М.М., магістрант Сірик С.В.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ХВИЛЬОВИХ РІВНЯНЬ ТИПУ БЮРГЕРСА ТА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

Abstract

Molchanov A. A., prof.; Salnikov N.N., assoc.prof.; Siryk S.V., m. stud.
Numerical integration of nonlinear wave equations of Burgers and KdV types
The effective modification of Petrov-Galerkin method has been proposed for numerical integration of Burgers and KdV equations. The practical advantages of proposed method over classical methods have been shown. The ways for further research are proposed as well.

Вступ

Багато фізичних процесів описуються нелінійними хвильовими рівняннями. Приклади таких процесів охоплюють явища, спостережувані в газо- та гідродинаміці, теорії твердого тіла, магнетизмі небесних світил тощо. Однією з важливих особливостей нелінійних хвильових рівнянь є те, що вони можуть допускати негладкі (чи навіть розривні) розв'язки [1], які відповідають ударним хвилям, і які дійсно можуть мати місце при еволюції фізичних процесів. Інша особливість даних рівнянь полягає в тому, що розв'язки можуть формувати специфічні стійкі локалізовані утворення, так звані *солітони* чи *кінки* [2]. Слід зазначити, що аналітичні розв'язки нелінійних рівнянь, навіть в частинних випадках, як правило, знайти досить важко, чи й зовсім неможливо.

Важливими з практичної точки зору, але особливо складними для розв'язання, вважаються задачі з домінуючими конвективними членами [1] та малими параметрами біля старших похідних – так звані *сингулярні* крайові задачі [3]. Їх розв'язки можуть стрибкоподібно змінюватись на тонкому перехідному шарі (області ущільнення ударної хвилі), що практично унеможливлює розв'язання таких задач класичними чисельними методами. Так, в [1] аналізуються та застосовуються різницеві схеми із різноманітними формами апроксимації похідної проти потоку. Хоча ці схеми й стійкі, проте при їх застосуванні часто не вдається досягти необхідної крутизни фронту ударної хвилі, так як схема "розмазує" фронт за межі істинного перехідного шару. Розв'язки, що отримуються проекційними методами Гальоркіна та Петрова-Гальоркіна зі скінченними елементами можуть бути нестійкими чи мати коливальний характер [1, 3], що недопустимо при чисельному інтегруванні. Досить гарні підходи, які ґрунтуються на основі методу Петрова-Гальоркіна з базисними та ваговими функціями у вигляді комбінацій ортогональних поліномів, були запропоновані в працях [4, 5]. Проте дані методи застосовні лише для вузького класу задач (наприклад, підходять для рівняння Кортевега-де Фріза, проте незастосовні до рівняння Бюргерса).

Дослідження присвячене розробці чисельних методів інтегрування нелінійних хвильових рівнянь та практичному впровадженню розроблених методів і алгоритмів. Підхід авторів базується на використанні методу Петрова-Гальоркіна зі скінченними елементами, та дозволяє знаходити слабкі (узагальнені) [3] розв'язки крайових задач.

Постановка задач

1) Розглянемо узагальнене нестаціонарне рівняння Бюргерса [1], в якому коефіцієнти являються відомими функціями часу та просторової координати:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda(x,t)u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Відношення коефіцієнта $\lambda(x,t)$ при конвективному доданку до коефіцієнта $\nu(x,t)$ при дифузійному, називається *числом Пекле* [1], і являється мірою обумовленості задачі (1). Чим більше число Пекле, тим крутішим буде фронт ударних хвиль, і тим важче знайти чисельний розв'язок.

2) Розглянемо узагальнене рівняння Кортевега-де Фріза

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial t}+\beta u+\gamma\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{2}$$

де α, β, γ, δ, λ – константи.

Для рівнянь (1), (2) ставляться (мішані) крайові задачі на скінченному інтервалі Ω по просторовій координаті. Мета дослідження полягає в розробці та практичній реалізації ефективних методів чисельного інтегрування вказаних крайових задач.

Побудова методів інтегрування

Слабкий розв'язок [3] рівнянь (1) та (2) будемо шукати в вигляді

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{n} a_j(t) N_j(x), \tag{3}$$

де $\{N_j\}$ – сукупність кусково-лінійних базисних функцій з компактним носієм. Використання базисних функцій із компактним носієм являється особливістю скінченноелементного підходу. Так, наприклад у роботі [5] в якості базисних функцій використовуються поліноми Лежандра.

Згідно методу Петрова-Гальоркіна, тепер слід підставити розвинення (3) у рівняння в частинних похідних, помножити отримане співвідношення на вагову функцію W_i, та проінтегрувати на відрізку, де задано дане рівняння.

В якості вагових функцій використовуються функції вигляду

$$W_i(x)=N_i(x)+\alpha W_i^*(x), \tag{4}$$

де $W_i^*(x)$ – кусково-квадратична функція. Саме наявністю доданку $\alpha W_i^*(x)$ в формулі (4) і відрізняється метод Петрова-Гальоркіна від класичного методу Гальоркіна – для останнього число α тотожно дорівнює нулю. Вибір параметра α являється важливим етапом побудови чисельної схеми, оскільки впливає на її стійкість. Відомо [1, 3], що класичний метод Гальоркіна чисельно нестійкий (або слабо стійкий) для задач конвекції-дифузії із великими значеннями числа Пекле, і породжує коливні розв'язки, в той час як застосування методу Петрова-Гальоркіна дозволяє отримати стійкі схеми. Варіанти вибору параметра α для задач конвекції-дифузії, та міркування щодо оптимальності вибору, викладено в праці [6]. Тому, беручи до уваги структурну схожість рівняння конвекції-дифузії та рівнянь (1) і (2), і враховуючи специфіку даних рівнянь, ми можемо скористатися результатами, отриманими в [6]. Також в [6] детально викладені особливості побудови базисних та вагових функцій.

Підставимо розвинення (3) в рівняння Бюргерса (1). За допомогою методу Петрова-Гальоркіна для коефіцієнтів розкладу (4), залежних від часу, отримаємо наступну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\left(\sum_{j\in I} D_{ij}\right)\dot{a}_i=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_{ijk}^{x}(t)a_j a_k-\sum_{j=1}^{n} D_{ij}^{x}(t)a_j-\sum_{j\in B} D_{ij}\dot{a}_j+f_i, \tag{5}$$

при $i\in I$. Тут $D_{ij}\equiv\int\limits_{\Omega} W_i N_j dx,\ T_{ijk}^{x}\equiv\int\limits_{\Omega}\lambda\cdot N_j\dfrac{dN_k}{dx}W_i dx,\ D_{ij}^{x}\equiv\int\limits_{\Omega}\dfrac{dN_j}{dx}\dfrac{\partial(\nu\cdot W_i)}{\partial x}dx,$ доданок f_i утворюється при врахуванні граничних умов задачі, I – множина індексів базисних функцій, коефіцієнти при котрих потрібно знайти, $B\equiv\{1,\ldots,n\}\setminus I$ – множина індексів "граничних" вузлів.

Підставимо розвинення (3) в рівняння Кортевега-де Фріза (2). За допомогою методу Петрова-Гальоркіна, отримуємо систему:

$$\left(\alpha\sum_{j\in I}D_{ij}\right)\dot{a}_i=-\beta\sum_{j=1}^{n}D_{ij}a_j-\gamma\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{x}a_j-\delta\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}T_{ijk}^{x}a_ja_k+ \tag{6}$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{xx}a_j-\sum_{j=1}^{n}D_{ij}^{x^2x}a_j-\alpha\sum_{j\in B}D_{ij}\dot{a}_j+f_i,$$

при $i\in I$. Тут $D_{ij}\equiv\int\limits_{\Omega}W_iN_jdx$, $D_{ij}^{x}\equiv\int\limits_{\Omega}W_i\dfrac{dN_j}{dx}dx$, $T_{ijk}^{x}\equiv\int\limits_{\Omega}W_iN_j\dfrac{dN_k}{dx}dx$,

$D_{ij}^{xx}\equiv\int\limits_{\Omega}\dfrac{dW_i}{dx}\dfrac{dN_j}{dx}dx$, $D_{ij}^{x^2x}\equiv\int\limits_{\Omega}\dfrac{d^2W_i}{dx^2}\dfrac{dN_j}{dx}dx$.

Початкові умови для систем (5), (6) звичайних диференціальних рівнянь визначаються із початкових умов вихідних крайових задач (1), (2).

На відміну від стандартного методу Петрова-Гальоркіна [1, 3-5], в запропонованій авторами версії на кожному кроці інтегрування систем (5) та (6) відбувається налаштування форми вагових функцій (4) шляхом вибору оптимального значення параметра α [6] із врахуванням розв'язку даних систем, отриманого на попередньому кроці. Оскільки параметр α лінійно входить в визначення вагової функції, то інтеграли від комбінацій базисних та вагових функцій можуть бути обчислені, причому аналітично [1], на початку розрахунків раз і назавжди. Тому час роботи запропонованого методу практично не відрізнятиметься від часу роботи класичних методів Гальоркіна.

Також в системах (5) та (6) використовується зосереджена (lumped) [1] апроксимація похідних по часу, що дозволяє покращити стійкість методу. В результаті, ми отримуємо гібридний, проекційно-різницевий метод.

Чисельні експерименти

Як приклад застосування запропонованого методу для рівнянь (1), (2) були розглянуті крайові задачі із негладкими та розривними початковими умовами. Розрахунки показують, що алгоритм правильно відтворює профіль ударних хвиль при їх еволюції в часі, в той же час як стандартний метод Петрова-Гальоркіна та більшість різницевих методів в даній ситуації являються нестійкими і породжують коливання при переході через передній фронт ударної хвилі [1, 3]. Це свідчить про ефективність запропонованого методу для подібного класу задач.

Також для рівнянь (1), (2) ставилися задачі про еволюцію солітонів та кінків [2]. Для подібного класу задач важливою ознакою коректності чисельного методу інтегрування задачі являється його здатність зберігати форму хвильових пакетів, оскільки розв'язки в даному випадку мають тип біжучих хвиль. Розрахунки показують, що вказана властивість виконується для запропонованого методу.

Висновки

В даній праці запропонована модифікація стандартного методу Петрова-Гальоркіна [1, 3-5], що дозволяє чисельно інтегрувати нелінійні сингулярні крайові задачі, практично нерозв'язні іншими проекційними та різницевими методами. Основна ідея модифікації полягає в тому, що на кожному кроці інтегрування системи відбувається налаштування форми вагових функцій [6] з врахуванням розв'язку, отриманого на попередньому кроці, а також використанню спеціальних апроксимацій частинних похідних по часовій змінній. Розрахунки підтверджують високу точність та чисельну стійкість запропонованого алгоритму.

В подальшому планується узагальнення методу на нелінійні рівняння вищих порядків із нестаціонарними коефіцієнтами та дослідження оптимального вигляду вагової функції для даних рівнянь.

Література

1. *Finlayson B.A.* Numerical methods for problems with moving fronts. – Seattle, Washington USA: Ravenna Park Publishing, Inc., 1992. – 613 p.
2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 696 с.
3. *Grossmann C., Roos H.-G., Stynes M.* Numerical Treatment of Partial Differential Equations.–Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag,2007.–596 p.
4. *Goubet O., Shen J.* On the dual Petrov-Galerkin formulation of the KdV equation on a finite interval.//Adv.Differential Equations, 12 (2007), 221- 239.
5. *Jie Shen.* A new dual-Petrov-Galerkin method for third and higher odd-order differential equations: application to the KdV equation // SIAM J. Numer. Anal., 41 (2003), 1595–1619.
6. *Сальников Н.Н., Сирик С.В., Терещенко И.А.* О построении конечномерной математической модели процесса конвекции–диффузии с использованием метода Петрова–Галеркина. // Проблемы управления и информатики. – 2010. – № 3 (в печати).