УДК 044.67:519.63+551.551.31

К. ф.-м. н., Ст. н. с., Селіванов Ю.О., студент Козік М.В.

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»**

ВИКОРИСТАННЯ КРАТНОМАСШТАБНОГО ВЕЙВЛЕТНОГО МЕТОДУ СІТОК У ЧАСОВІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ ОЦІНКИ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ В АТМОСФЕРІ

Abstract

Yuriy Selivanov, PhD, senior researcher; Kozik Mykhailo, student
Multi-Resolution Time Domain for evaluation wave processes in atmosphere

This paper is devoted to analysis wave processes in atmosphere. The classical MRTD method is studied and discussed. The modified MRTD method for applying to dispersion acoustic-gravity wave in atmosphere is proposed. Such method can use in other scientific research. Too proposed the ways for further research and modification.

Вступ

Задача аналізу хвильових процесів в атмосфері є важливою частиною багатьох наукових досліджень. Вона широко використовується для прогнозування погоди та катастрофічних подій, створення нових аеродинамічних форм у військовій галузі, розробки радарів та іншого авіаційного обладнання.

Складність даної задачі полягає в моделюванні процесів в атмосфері в реальному часі, що потребує надійних методів та великих обчислювальних потужностей.

Існує декілька алгоритмів для оцінки хвильових процесів, таких як FDTD [1], MRTD [2], RK-MRTD [3], проте всі вони базуються на розв’язанні диференційних рівнянь Максвелла. В даній статті пропонується модифікація існуючого алгоритму для застосування його до рівнянь гідродинаміки.

Постановка задачі

Задача полягає в модифікації кратномасштабного вейвлетного методу сіток у часовій області [2] таким чином, щоб його можна було застосувати до рівнянь розповсюдження акустико-гравітаційних хвиль в атмосфері [4].

Термінологія

MRTD (Multi-Resolution Time Domain) – кратномасштабний вейвлетний метод сіток у часовій області, який використовується для апроксимації рівнянь Максвелла у часі та просторі.

Дискретизація – перетворення функцій неперервних змінних у функції дискретних змінних, при якому початкова неперервна функція може бути відновлена із заданою точністю [5].

Схема обновлення – ітераційна частина алгоритму MRTD, в якій з попереднього значення дискретизованого вектору, можна знайти наступне і т.д. до завершення моделювання.

Опис алгоритму

Загальний алгоритм методу MRTD, для числового розв'язку рівнянь Максвелла виглядає наступним чином [2]:

1. Записати дискретизацію для кожної просторової компоненти кожного з векторів (***E***, ***B***, ***D***, ***H***) рівнянь Максвелла.
2. Визначити ***B*** з дискретизованого ***E.***
3. Визначити ***H*** з дискретизованого ***B.***
4. Визначити ***D*** з дискретизованого ***H.***
5. Визначити ***E*** з дискретизованого ***D.***
6. Повторення алгоритму з п.2 до завершення моделювання.

Модифікація алгоритму MRTD полягає у модифікації дискретизації та схеми обновлення в застосуванні до рівнянь розповсюдження акустико-гравітаційних хвиль (АГХ) в атмосфері [4]. Дані рівняння мають наступний вигляд:

$$\frac{dv_z}{dz} - g\cdot\frac{k_x^2}{\omega^2}\cdot v_z = \left(1-\frac{k_x^2\cdot c_s^2}{\omega^2}\right)\cdot V, \qquad (1)$$

$$c_s^2\frac{dV}{dz} - g\left(\gamma-\frac{k_x^2\cdot c_s^2}{\omega^2}\right)\cdot V = \left(\frac{k_x^2\cdot g^2}{\omega^2}-\omega^2\right)\cdot v_z, \qquad (2)$$

де γ - показник адіабати середовища, g - прискорення вільного падіння, c_s - швидкість звуку, ω - циклічна частота, k_x - хвильовий вектор вздовж осі $\vec{e}_x$, v_z - компонента швидкості, спрямована проти сили тяжіння (вертикально), $V = div\vec{v}$ (описує стисливість середовища).

Розв'язки системи (1), (2) розповсюджуються по x, та є однорідними по y, при цьому вектор швидкості має вигляд [4]:

$$\vec{v} = \left(v_x(z)\vec{e}_x + v_z(z)\cdot\vec{e}_z\right)e^{-i\omega t+ixk_x} \qquad (3)$$

Для аналізу системи (1), (2) зручно використовувати величини v_z та V, тому саме вони будуть грати роль змінних в методі MRTD.

Клітина Йе [1], в цьому випадку буде мати також модифікований вигляд [Рис. 1]

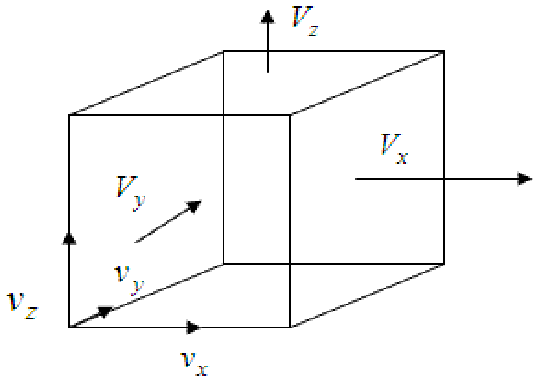

Рис.1 Клітина Йе для системи рівнянь розповсюдження АГХ в атмосфері

Вся область дослідження ділиться на клітини Йе заданих розмірів, після чого ми отримуємо сітку. В вузлах такої сітки будуть знаходитись компоненти швидкості, а між вузлами компоненти стисливості середовища.

Враховуючи, що розв’язки нашої системи є однорідними по y, а компоненти швидкості в стисливості середовища залежать тільки від вертикальної компоненти, отримуємо одновимірну задачу із змінними v_z та V (хоч в загальному випадку під V розуміємо V_z).

Для будь-якого вейвлет базису з скейлінг-функціями $\{\varphi_i(x)\}$ та вейвлет-функціями $\{\psi_i(x)\}$, дискретизація буде мати вигляд:

$$v_z(z,t)=\sum_{n,i} h_n(t)\cdot\left(A^{z,\phi}_{n,i}\cdot\varphi_i(z)+A^{z,\psi}_{n,i}\cdot\psi_i(z)\right), \tag{4}$$

$$V(z,t)=\sum_{n,i} h_n(t)\cdot\left(B^{z,\phi}_{n,i+\frac{1}{2}}\cdot\varphi_i(z)+B^{z,\psi}_{n,i+\frac{1}{2}}\cdot\psi_i(z)\right), \tag{5}$$

де $h_n(t)$ - проста імпульсна функція типу вейвлету Хаара, що гарантує причинність, $A^{z,\phi}_{n,i}, A^{z,\psi}_{n,i}, B^{z,\phi}_{n,i+\frac{1}{2}}, B^{z,\psi}_{n,i+\frac{1}{2}}$ - скейлінг та вейвлет коефіцієнти.

Рівняння схеми обновлення випливають із застосування вейвлетного методу Гальоркіна до рівнянь (1), (2) і мають вигляд:

$$A^{z,\phi}_{n,k+1}=A^{z,\phi}_{n,k}+\frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\sum_{i\in n_a} a(i)\cdot B^{z,\phi}_{n,k+i-\frac{1}{2}}+\sum_{i\in n_b} b(i)\cdot B^{z,\psi}_{n,k+i-\frac{1}{2}}\right), \tag{6}$$

$$A^{z,\psi}_{n,k+1} = A^{z,\psi}_{n,k} + \frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\sum_{i \in n_c} c(i) \cdot B^{z,\phi}_{n,k+i-\frac{1}{2}} + \sum_{i \in n_d} d(i) \cdot B^{z,\psi}_{n,k+i-\frac{1}{2}} \right), \quad (7)$$

$$B^{z,\phi}_{n,k+\frac{1}{2}} = B^{z,\phi}_{n,k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\sum_{i \in n_a} a(i) \cdot A^{z,\phi}_{n,k+i-1} + \sum_{i \in n_b} b(i) \cdot A^{z,\psi}_{n,k+i-1} \right), \quad (8)$$

$$B^{z,\psi}_{n,k+\frac{1}{2}} = B^{z,\psi}_{n,k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\Delta z}\left(\sum_{i \in n_c} c(i) \cdot A^{z,\phi}_{n,k+i-1} + \sum_{i \in n_d} d(i) \cdot A^{z,\psi}_{n,k+i-1} \right), \quad (9)$$

де $a(i), b(i), c(i), d(i)$ - MRTD коефіцієнти, що рахуються числовим інтегруванням в області Фур'є початкових рівнянь (1) і (2), а n_a, n_b, n_c, n_d - кількість вже порахованих MRTD-коефіцієнтів.

Додаючи до цих рівнянь граничні умови, можна змоделювати поведінку v_z та V у атмосфері.

Висновок

В даній роботі були виведені рівняння дискретизації та обновлення для розв'язку рівнянь розповсюдження АГХ [4]. Отримана модифікована схема MRTD є принципово новим підходом до оцінки хвильових процесів в атмосфері і може застосовуватись у інших наукових дослідженнях.

В подальшому планується реалізувати модифікований алгоритм та узагальнити його на тривимірний простір.

Література

1. *Kane Yee*. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // Antennas and Propagation. – 1996. – vol. 14. - pp. 302–307.
2. *Nathan A. Bushyager, Manos M. Tentzeris*. Multi Resolution Time Domain Method in Electromagnetics, Morgan & Claypool, 2005. – 116 p.
3. *Qunsheng Cao, Kanapady R., Reitich F.* High-Order Runge-Kutta Multiresolution Time Domain for Computational Electromagnetics // IEEE transactions on microwave theory and techniques. – 2006. - vol. 54, pp. 3316-3326.
4. *Черемних О.К., Селіванов Ю.О., Захаров І.В*. Вплив стисливості та неізотермічності атмосфери на розповсюдження акустико-гравітаційних хвиль.
5. *Л. Рабінер, Б. Гоулд.* Теорія і застосування цифрової обробки сигналів: Пер. з англ. – М.: Мир, 1978. – 835 с.