

Магістрант Станішевський Є.Г.

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»**

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ ЦИФРОВИХ ФІЛЬТРІВ З КОЕФІЦІЄНТАМИ-ТРИЧИСЛАМИ

Вступ

Цифрова фільтрація є одним з найбільш могутніх інструментальних засобів цифрової обробки інформації. Підкреслимо, що в реальних системах цифрової обробки змінні та коефіцієнти запам'ятовуються у двійковій формі в регістрах, які мають обмежену кількість розрядів, що може призводити до значних викривлень вихідних даних. Тому існує актуальна задача забезпечення низької чутливості цифрових систем до можливих коливань власних параметрів. У той же час можлива побудова цифрових фільтрів (ЦФ) з гіперкомплексними коефіцієнтами. Найбільш значущі переваги використання гіперкомплексних чисел — це зниження порядку ЦФ і краща параметрична чутливість, що показується в багатьох роботах [1-3].

Постановка задачі

Метою даної роботи є розробка методики побудови ЦФ з гіперкомплексними коефіцієнтами 3-ої вимірності, яка може бути альтернативною методиці [1].

Використання гіперкомплексних чисел при побудові цифрових фільтрів

Широке застосування цифрових фільтрів призвело в останнє десятиріччя до створення структур рекурсивних ЦФ з гіперкомплексними коефіцієнтами. При створенні таких структур використовується та особливість, що передавальна функція у вигляді дрібно-раціонального виразу в гіперкомплексній області може бути перетворена у гіперкомплексну функцію з дрібно-раціональними компонентами більш високих степенів з дійсними коефіцієнтами. Крім того, наукові публікації свідчать про інтерес до цієї актуальної теми в таких країнах, як Німеччина, Японія та інших.

Для побудови фільтрів і з дійсними, і з гіперкомплексними коефіцієнтами можна використовувати класичну структурну схему ЦФ, яка в літературі має назву „другої прямої форми”. Хоча різні гіперкомплексні чис-

лові системи (ГЧС) відрізняються за своїми властивостями, в цілому, структурні схеми в другій прямій формі, що описують роботу ЦФ з наборами коефіцієнтів, які належать різним ГЧС, подібні. Їх структури в прямій формі відрізняються лише числом зв'язків між елементами схеми, яке залежить від вимірності ГЧС, та правилами виконання операцій в цих елементах.

Водночас не треба забувати про збільшення обчислювальної складності ЦФ при використанні ГЧС. Для подолання цієї проблеми успішно застосовують різні підходи [1-3].

Побудова цифрового фільтра з коефіцієнтами-тричислами

Для розв'язання поставленої задачі в рамках даного підходу обрана система гіперкомплексних чисел 3-ої вимірності (тричисел). Таблиця множення цієї асоціативно-комутативної системи (будемо позначати її C_3) наведена в табл. 1.

Таблиця 1. Таблиця множення C_3

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

Виходячи з табл. 1, визначаються добуток, норма, спряжене тричисел (по аналогії з комплексними числами).

Нехай передавальна функція ЦФ 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами має вигляд:

$$H_r = \frac{a + b \cdot z^{-1} + c \cdot z^{-2} + d \cdot z^{-3}}{1 + o \cdot z^{-1} + p \cdot z^{-2} + q \cdot z^{-3}}.$$

Реалізуємо її за допомогою передавальної функції 1-го порядку з коефіцієнтами-тричислами:

$$H_h(z) = \frac{g + h \cdot z^{-1}}{e_1 + k \cdot z^{-1}},$$

де $g = g_1e_1 + g_2e_2 + g_3e_3$, $h = h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3$, $k = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$.

Для цього приводимо $H_h(z)$ до вигляду $H_1(z)e_1 + H_2(z)e_2 + H_3(z)e_3$, домножуючи чисельник і знаменник на спряжене знаменника. Прирівнюючи вирази при однакових степенях z знаменників $H_r(z)$ і $H_h(z)$, отримаємо систему рівнянь. Її розв'язком будуть коефіцієнти k_1, k_2, k_3 . Знову прирівнюючи вирази при однакових степенях z будь-якого з чисельників $H_1(z), H_2(z)$ або $H_3(z)$ і чисельника $H_r(z)$, отримуємо систему чотирьох лінійних рівнянь

з шістьма невідомими. Приймавши, наприклад, $g_2 = g_3 = 0$ і розв'язавши систему, отримаємо решту коефіцієнтів: g і h .

Область визначення розв'язку системи одночасно дає умову реалізації ЦФ з коефіцієнтами-тричислами.

На рис. 1 наведена можлива реалізація структурної схеми фільтра у другій прямій формі. На ній сигнал $x(n)$ є дійсним, всередині схеми циркулюють гіперкомплексні сигнали, а на виході фільтра обрана та компонента гіперкомплексного сигналу, що реалізує передавальну функцію ЦФ з дійсними коефіцієнтами.

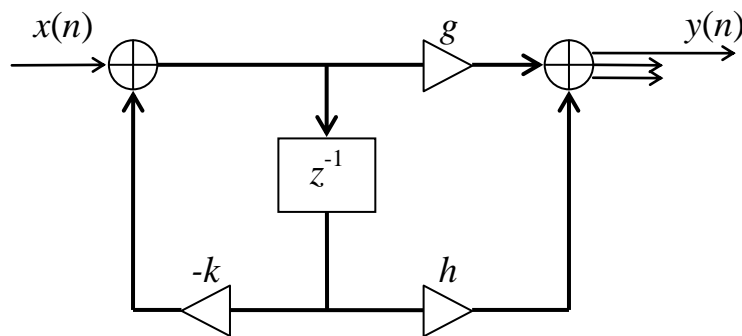


Рис. 1. Структурна схема фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами

Переваги цифрових фільтрів з коефіцієнтами-тричислами

Викладена методика дає можливість оптимізації параметричної чутливості модуля передавальної функції ЦФ з коефіцієнтами-тричислами за рахунок недовизначеності системи рівнянь, що визначає зв'язок між дійсними та гіперкомплексними коефіцієнтами. Це ілюструє наступний приклад.

Приклад розрахунку цифрового фільтра

Для прикладу візьмемо фільтр низьких частот Батерворта 3-го порядку, що визначається наступним різницевою рівнянням: $y_n = x_{n-3} + 3x_{n-2} + 3x_{n-1} + x_{n-0} + 0.6041096995y_{n-3} - 2.1152541270y_{n-2} + 2.4986083447y_{n-1}$.

Визначимо коефіцієнти ЦФ при реалізації шляхом запропонованого підходу: $k = -0.8328694482e_1 + 0.1391882026e_2 - 0.0819982655e_3$, $g = e_1$, $h = 4.6657388964 e_1 + 282.0253983937 e_2 + 93.8209934466 e_3$.

На рис. 2 ми зобразили три АЧХ: ідеального фільтра (M), ЦФ з квантованими до трьох десяткових розрядів дійсними коефіцієнтами (Mr), ЦФ з квантованими до трьох десяткових розрядів гіперкомплексними коефіцієнтами (Mh). Можна бачити, що АЧХ ЦФ з гіперкомплексними

коефіцієнтами менше відхиляється від ідеальної АЧХ. У полосі подавлення всі АЧХ майже співпадають.

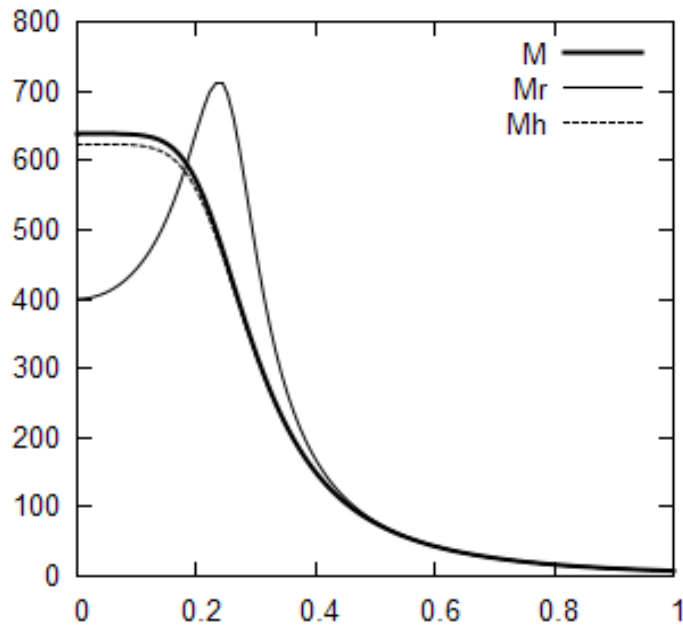


Рис. 2. АЧХ різних реалізацій фільтра

На рис. 3 зображені аналогічні графіки ФЧХ. В лівій частині графіка (у полосі пропускання фільтра) ФЧХ ЦФ з квантованими дійсними коефіцієнтами (Fr) значно відрізняється від ідеальної ФЧХ (F), у той час як ФЧХ ЦФ з квантованими гіперкомплексними коефіцієнтами (Fh) майже співпадає з ідеальною характеристикою. ФЧХ у полосі подавлення має незначний вклад у формування вихідного сигналу, тому гірша на цьому інтервалі ФЧХ ЦФ з гіперкомплексними коефіцієнтами не суттєва.

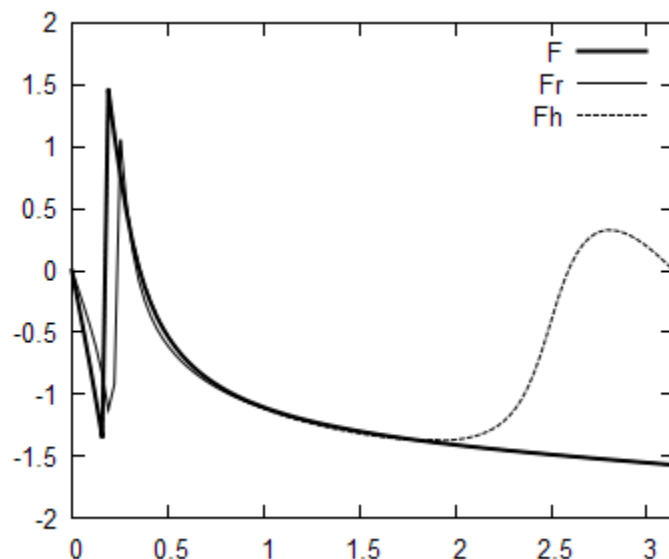


Рис. 3. ФЧХ різних реалізацій фільтра

Висновки

Таким чином, методика побудови ЦФ з гіперкомплексними коефіцієнтами-тричислами, що реалізує рекурсивний фільтр з дійсними коефіцієнтами, включає перевірку умов реалізації, розрахунок гіперкомплексних коефіцієнтів і побудову структурної схеми фільтра, наприклад у другій прямій формі. Завдяки деякій свободі переходу від дійсних коефіцієнтів до тричисел одним з етапів проектування ЦФ може бути оптимізація параметричної чутливості модуля передавальної функції ЦФ.

Подальші дослідження в цьому напрямку можуть бути присвячені більш точній оцінці чутливості ЦФ.

Література

1. Федоренко О.В. Автоматизоване проектування цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами: Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. – К.: НТУУ «КПІ», 2008. – 20 с.
2. Toyoshima H. Complex IIR Digital Filters Composed of Hypercomplex All-Pass Filters // Proc. 1995 IEEE Singapore Int. Conf. Signal Processing, Circuits & Systems, 1995. – С. 178–183.
3. Toyoshima H, Higuchi S. Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions // Proc. Second Int. Conf. Information, Communications and Signal Processing, 1999. – С. 1–5.