УДК 004.3

Аспірант Жабіна В.В.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

ДОДАВАННЯ ЧИСЕЛ У ЗМІЩЕНИХ НАДЛИШКОВИХ СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ

Вступ

Зменшення часу одержання результату при виконанні послідовностей залежних за даними операцій може бути досягнуто за рахунок застосування методів машинної арифметики, що дозволяють виконувати залежні операції в режимі часткового суміщення з використанням надлишкових систем числення [1]. Необхідність таких обчислень виникає, наприклад, при реалізації багатомісних функцій шляхом суперпозиції функцій з меншою кількістю аргументів.

Для суміщення операцій використовуються квазіпаралельні операційні пристрої [2, 3], що забезпечують обчислення при порозрядному надходженні операндів. При виконанні операцій зі старших розрядів такий режим обчислень може бути забезпечений з використанням надлишкових систем числення. Виконання наступної операції в ланцюжку залежних за даними операцій може починатися не після завершення попередньої операції, а відразу ж після одержання першого розряду результату цієї операції, за рахунок чого й забезпечується режим суміщення обчислень. Ефективність виконання послідовності операцій залежить від тривалості одного кроку формування цифри результату, а також від латентної затримки інформації в операційних пристроях.

Відомі методи порозрядних обчислень у симетричних надлишкових системах числення, що дозволяють реалізувати будь-які функції як з додатними, так і з від’ємними частинними похідними [2, 3]. Недоліком використання симетричних систем є розширення розрядної сітки при виконанні послідовностей операцій. Це вимагає зміни алгоритмів виконання початкових і наступних кроків операцій, що разом з необхідністю інвертування кодів операндів (через наявність від’ємних знаків розрядів операндів) призводить до ускладнення операційних пристроїв. Крім того, відомі методи в основному розглядаються для двійкових систем числення і недостатньо добре вивчені для систем з великою основою.

Постановка задачі

Реалізація методів чисельного інтегрування, цифрової обробки сигналів, поліноміальної апроксимації базується на операціях додавання і множення. Це дає можливість при додатних аргументах використовувати для обчислень зміщені системи числення.

У роботі розглядається операція додавання чисел, сумісна за формою подання інформації з операцією множення в зміщених системах числення [4]. Необхідно дослідити вплив параметрів систем числення на складність операційних пристроїв і час виконання послідовностей операцій, залежних за даними.

Обгрунтування методу

Функція $Z^* = X + Y$, де аргументи X і Y є додатними числами, має лише додатні часткові похідні. Отже, додатні прирости аргументів викликають лише додатний приріст. Завдяки цьому додавання додатних чисел при порозрядному введенні операндів можна реалізувати в зміщеній системі числення з цифрами $\{\overline{0,q}\}$.

Нехай операнди X і Y є правильними дробами, поданими n- розрядним кодом у позиційній системі числення з основою k, тобто $X = \sum_{i=1}^{n} x_i k^{-i}$ і $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i k^{-i}$, де $x_i, y_i \in \{\overline{0,q}\}$ - цифри операндів. Щоб не перевищити зазначений діапазон цифр для подання результату необхідно починати формування його розрядів із затримкою на деяку кількість кроків p. Для спрощення індексації при написанні формул будемо розглядати суму $Z = k^{-p}(X+Y)$. Якщо на i-му кроці додавання формується цифра результату Z з вагою k^{-i}, то вага цифри результату $Z^* = X + Y$ дорівнює k^{p-i}, тобто цифри дійсного результату формуються із запізненням на p кроків. Для одержання n розрядів суми Z^* після коми необхідно сформувати $m = n + p$ розрядів суми Z, яку можна записати як $Z = \sum_{i=1}^{m} z_i k^{-i}$.

Будемо вважати, що операнди вводяться зі старших розрядів. Коди X, Y і Z, що містять тільки i розрядів праворуч від коми, позначимо відповідно через X_i, Y_i і Z_i.

Після виконання m кроків обчислень можна одержати код $Z_m = Z$ з похибкою, що не перевищує k^{-m}, якщо на кожному i-му кроці цифру z_i вибирати таким чином, щоб виконувалася умова

$$Z_i \le k^{-p}(X_i + Y_i) < Z_i + k^{-i}, \tag{1}$$

оскільки при $i = m$ має місце $X_m = X$ і $Y_m = Y$.

Увівши позначення

$$R_i = [k^{-p}(X_i + Y_i) - Z_i]k^i, \tag{2}$$

умову (1) можна записати як

$$0 \le R_i < 1. \tag{3}$$

Припустимо, що умова (3) виконується на $(i-1)$-му кроці. Визначимо, при якому мінімальному значенні p ця умова буде виконуватися на будь-якому наступному кроці.

Вираз (2) з урахуванням формул (1) та (3) можна привести до вигляду
$R_i = kR_{i-1} + k^{-p}(y_i + x_i) - z_i$ або, увівши позначення

$$H_i = kR_{i-1} + k^{-p}(y_i + x_i), \tag{4}$$

подати у формі

$$R_i = H_i - z_i. \tag{5}$$

З урахуванням (5) вираз (3) можна записати у вигляді

$$z_i \le H_i < 1 + z_i. \tag{6}$$

Оскільки $z_{i\min} = 0$ і $z_{i\max} = q$, то умова (6) буде виконуватися в тому випадку, якщо значення H_i не будуть виходити за межі інтервалу $[0, q+1)$. Оскільки всі члени, що входять у праву частину (4), не можуть набувати від'ємних значень, то H_i також не може бути від'ємним числом. Отже, p необхідно визначати з умови $H_{i\max} < q + 1$, яке з урахуванням (3) і (4) набуває вигляду $k + 2qk^{-p} < q + 1$. Враховуючи, що p має бути цілим числом, то мінімальне його значення визначається формулою

$$p = \left] \log_k \frac{2q}{q - r + 1} \right[. \tag{7}$$

Оскільки перед початком операції, коли $X_0 = Y_0 = R_0 = Z_0 = 0$, умова (3) виконується, то воно буде виконуватися на будь-якому кроці, якщо p обрано з умови (7).

Підставляючи в (6) усі можливі значення $z_i \in \{\overline{0, q}\}$, неважко одержати правило формування цифри результату і остачі на i-му кроці:

$$z_i = ent\, H_i, \tag{8}$$

$$R_i = rest\, H_i. \qquad (9)$$

Таким чином, один крок додавання зводиться до наступного. За формулою (4) знаходимо значення H_i, відповідно до (8) формується цифра результату, а значення R_i, необхідне для виконання наступного кроку, визначається за формулою (9). Початковими є значення $i = 1, X_0 = Y_0 = R_0 = Z_0 = 0$.

Оскільки $X_i < 1$ і $Y_i < 1$, то $k^{-p}(X_i + Y_i) < k^{-p}$, а отже, $Z_i < k^{-p}$, що випливає з (1). Таким чином, перша значуща цифра результату може бути отримана не раніше, ніж на $(p+1)$-му кроці. Оскільки на цьому кроці формується цифра результату Z^* з вагою k^{-1}, то очевидно, що ефект розширення розрядної сітки результату стосовно розрядної сітки операндів у даному випадку відсутній. Крім того, немає необхідності в циклі виконувати віднімання кодів, що характерно для симетричних систем числення. Усе це спрощує апаратну реалізацію операції додавання.

Вибір системи числення

Вибір системи числення при заданій основі впливає як на запізнення при формуванні розрядів результату, так і на кількість інформаційних входів і виходів операційних пристроїв, оскільки зі збільшенням кількості можливих цифр у загальному випадку збільшується і кількість ліній для передачі цифр від одного операційного пристрою до іншого. Зрозуміло, що з огляду зменшення кількості провідників для передачі інформації слід віддати перевагу системам числення з меншою надлишковістю, тобто з меншою кількістю різних цифр.

Визначимо, у яких системах числення може бути реалізований розглянутий метод додавання. З (7) видно, що q повинне задовольняти умову $q - k + 1 > 0$, звідки $q > k - 1$. Оскільки q ціле число, то мінімальне його значення повинне бути не меншим за основу k системи числення. Природно, що всі системи, які задовольняють зазначену вище вимогу, є надлишковими. Мінімальну надлишковість серед них мають системи з цифрами $\{\overline{0,k}\}$. Ці системи числення містять тільки на одну цифру більше, ніж канонічні системи. Зі збільшенням основи k зменшується розрядність чисел при однаковій точності, що веде до зменшенням часу виконання операцій. Однак величина q впливає на запізнення формування результату. Аналізуючи формулу (7) для різних значень q і k можна визначити, що існують системи числення з основою $k > 2$, для яких $p = 1$. Такі системи повинні відповідати умові

$$q = \left]\frac{k^2 - k}{k - 2}\right[. \tag{10}$$

Очевидно, що застосовувати системи числення з більшою надлишковістю недоцільно, тому що до зменшення запізнення при формуванні цифр результату це не приводить, а кількість провідників для передачі даних між операційними пристроями зростає.

Висновки

Застосування зміщених надлишкових систем числення з основою $k > 2$ дозволяє в порівнянні з двійковою системою числення зменшити час виконання операцій за рахунок зменшення затримки формування розрядів результату операції і загальної кількості кроків обчислень.

Порівняно з симетричними системами числення застосування зміщених систем числення дозволяє зменшити апаратні витрати на побудову операційних пристроїв за рахунок спрощення алгоритму визначення цифр результату.

Порозрядна передача информації дає можливість зменшити кількість зв'язків між операційними пристроями порівняно із застосуванням паралельних пристроїв. Це підвищує ефективність реалізації пристроїв в інтегральному виконанні, наприклад, на ПЛІС. Зменшення кількості з'єднань підвищує надійність систем і дозволяє економніше використовувати ресурси інтегральних схем.

Література

1. *Поспелов Д.А.* Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М., «Высшая школа», 1970. – 308 с.
2. *Жабин В.И., Корнейчук В.И., Тарасенко В.П.* Некоторые машинные методы вычисления рациональных функций многих аргументов // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №12. – С. 145-154.
3. *Жабин В.И., Корнейчук В.И., Тарасенко В.П.* Построение быстродействующих специализированных вычислителей для реализации многоместных выражений // Автоматика и вычислительная техника. – 1981. – №6. – С. 18-22.
4. *Дичка И.А., Жабина В.В.* Совмещение зависимых операций на уровне обработки разрядов операндов // Искусственный интеллект. – 2008. – №3. – С. 649-654.