УДК 519.635.8

К.т.н., с. н. с. Сальніков М.М., студент Сірик С.В., студент Терещенко І.О.

Національний технічний університету України «Київський політехнічний інститут»

ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ МАГНІТНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

Вступ

Практично повсякденно ми стикаємося з речовинами, що знаходяться в трьох станах – рідкому, твердому і газоподібному. Існує четвертий стан речовини – *плазма*. Під плазмою слід розуміти квазінейтральний іонізований газ (з різним ступенем іонізації). Інтерес фізиків і астрономів до плазми зумовлений тим, що переважна частина Всесвіту (особливо - зірки) є плазмою. Серед зірок особливу роль відіграє Сонце. Сонце є масивною плазмовою кулею, що складається переважно з водню і гелію, які через високу температуру знаходяться в основному в іонізованому стані. З цього видно, що дослідження різних ефектів у плазмі відіграє велику роль у фізиці Сонця.

Математично рух плазми та поширення коливань описується системою рівнянь магнітної гідродинаміки (надалі скорочено системою *МГД-рівнянь*). Система МГД-рівнянь є комбінацією системи рівнянь гідродинаміки та рівнянь Максвела і є нелінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних. Дослідження та знаходження розв'язків системи *МГД*-рівнянь у двовимірному і тривимірному випадках є надзвичайно складним завданням, як в теоретичному, так і в чисельному плані. Аналітично дані рівняння навіть в досить простих випадках розв'язати дуже важко, чи й зовсім неможливо.

Хоча МГД-рівняння відомі досить давно, підходи до їх чисельного інтегрування почали активно розроблятись лише нещодавно (з середини 90-х років), і це в основному зумовлено бурхливим розвитком обчислювальної техніки. Так, в [1] запропоновано декілька методів інтегрування, що базуються на консервативних різницевих схемах та на методі скінченних об'ємів. Різницеві методи на основі модифікацій схем Годунова, Лакса-Вендрофа, Лакса-Фрідріхса та Русанова, а також методи розщеплення розглядаються в [2, 3, 4]. Досить ефективною модифікацією класичної схеми Годунова [4] є схема Ру [5].

Дане дослідження присвячене розробці чисельних методів інтегрування двовимірних МГД-рівнянь та практичному впровадженню розроблених методів і алгоритмів. Підхід авторів базується на методі скінченних елементів. Це пов'язано з тим, що даний метод дозволяє знаходити навіть розривні (або недостатньо гладкі) розв'язки МГД-рівнянь, що відповідають ударним хвилям, причому закони збереження та умови типу Ранкіна-Гюгоніо [1, 4] при фронтах ударних хвиль за даного підходу будуть виконуватись автоматично. Це є простим наслідком скінченно-елементного підходу, в той час як у випадку різницевих схем ці властивості потрібно спеціально перевіряти. Використання методу скінченних елементів позбавляє необхідності введення штучних диссипативних величин, як це звичайно робиться в різницевих схемах газової динаміки [4].

Постановка задачі

Розглянемо нев'язку нескінченно провідну плазму. У випадку припущення адіабатичності процесів, що цілком виправдане для більшості реальних фізичних процесів, отримаємо таку кінцеву систему (в формі Ейлера), що містить лише густину ρ, тиск p, швидкість $\vec{u}$ та магнітне поле $\vec{B}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{B} - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{u}), \tag{3}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \vec{g} \tag{4}$$

Задача полягає в розробці та практичній реалізації алгоритму чисельного інтегрування системи (1)-(4).

Розв'язання задачі

У підході авторів не використовується консервативна форма запису системи МГД-рівнянь, як у працях [1, 2, 3], де в якості змінних інтегрування береться густина, компоненти імпульсу та магнітне поле. У даному дослідженні змінними інтегрування вибрані вихідні величини (густина, тиск, компоненти швидкості та магнітного поля).

Є дві можливості вивчення збурень, що описуються системою (1)-(4):

1. Використати вихідні нелінійні рівняння (1)-(4).

2. Лінеаризувати рівняння (1)-(4) в околі рівновісного стану ($\vec{u}=0$, $\partial/\partial t=0$, $\rho_0=\rho_0(x,y)$, $p_0=p_0(x,y)$, $\vec{B}_0=\vec{B}_0(x,y)$). Ввівши невеликі збурення $\vec{v},\vec{b},\ p',\rho'$, отримаємо шукані величини в такому вигляді:

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{v}=\vec{v},\ \vec{B}=\vec{B}_0+\vec{b},\ p=p_0+p',\rho=\rho_0+\rho'. \qquad (5)$$

Підставивши (5) в систему (1)-(4) після деяких спрощень, отримаємо:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\rho_0+\rho_0\nabla\cdot\vec{v}=0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla p_0-\gamma p_0\nabla\cdot\vec{v}=0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\vec{b}}{\partial t}=(\vec{B}_0\cdot\nabla)\vec{v}-(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}_0-\vec{B}_0(\nabla\cdot\vec{v}) \qquad (8)$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=-\nabla\left(p'+\frac{(\vec{B}_0\cdot\vec{b})}{\mu_0}\right)+\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}_0\cdot\nabla)\vec{b}+\frac{1}{\mu_0}(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{B}_0+\rho'\vec{g}. \qquad (9)$$

Побудова алгоритму чисельного інтегрування

Будемо шукати наближений розв'язок (1)-(4) та (6)-(9) у вигляді:

$$\tilde{\rho}(t,x,y)=\sum_i R_i(t)N_i(x,y) \qquad \tilde{p}(t,x,y)=\sum_i P_i(t)N_i(x,y)$$

$$\tilde{u}_x(t,x,y)=\sum_i U_{xi}(t)N_i(x,y) \qquad \tilde{u}_y(t,x,y)=\sum_i U_{yi}(t)N_i(x,y)$$

$$\tilde{B}_x(t,x,y)=\sum_i B_{xi}(t)N_i(x,y) \qquad \tilde{B}_y(t,x,y)=\sum_i B_{yi}(t)N_i(x,y)$$

Тут кожна базисна функція $N_i(x,y)$ відмінна від нуля лише на елементах, до складу яких входить i-ий вузол, в цьому вузлі $N_i(x_i,y_i)=1$. $N_i(x,y)$ - лінійна на елементі та має скінчений носій відносно всієї області визначення. Для визначення $R_i(t),P_i(t),U_{xi}(t),U_{yi}(t),B_{xi}(t),B_{yi}(t)$ для (1)-(4) отримана наступна система ($\rho\equiv\tilde{\rho}$, $p\equiv\tilde{p}$, $u_x\equiv\tilde{u}_x$, $u_y\equiv\tilde{u}_y$, $B_x\equiv\tilde{B}_x$, $B_y\equiv\tilde{B}_y$):

$$\sum_j D_{ji}\dot{R}_j+\sum_k\sum_j\left(T^x_{ijk}+T^x_{ikj}\right)R_jU_{xk}+\sum_k\sum_j\left(T^y_{ikj}+T^y_{ijk}\right)R_jU_{yk}=0$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{P}_j+\sum_k\sum_j\left(T^x_{ikj}+\gamma T^x_{ijk}\right)P_jU_{xk}+\sum_k\sum_j\left(T^y_{ikj}+\gamma T^y_{ijk}\right)P_jU_{yk}=0$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{B}_{xj}=\sum_k\sum_j T^y_{ijk}B_{yj}U_{xk}-\sum_k\sum_j T^y_{ijk}B_{xj}U_{yk}-\sum_k\sum_j T^x_{ikj}B_{xj}U_{xk}-\sum_k\sum_j T^y_{ikj}B_{xj}U_{yk}$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{B}_{yj} = \sum_k\sum_j T^x_{ijk}B_{xj}U_{yk} - \sum_k\sum_j T^x_{ikj}B_{yj}U_{xk} - \sum_k\sum_j T^y_{ikj}B_{yj}U_{yk} - \sum_k\sum_j T^x_{ijk}B_{yj}U_{xk}$$

$$\sum_l\sum_j R_l\dot{U}_{xj}T_{lji} + \sum_j\sum_k\sum_l R_l U_{xj}U_{xk}Q^x_{iljk} + \sum_j\sum_k\sum_l R_l U_{yj}U_{xk}Q^y_{iljk} =$$

$$= -\sum_l P_l D^x_{il} - \frac{1}{\mu_0}\sum_k\sum_j B_{yk}B_{yj}T^x_{ikj} + \frac{1}{\mu_0}\sum_k\sum_j B_{yk}B_{xj}T^y_{ikj}$$

$$\sum_l\sum_j R_l\dot{U}_{yj}T_{ilj} + \sum_j\sum_k\sum_l R_l U_{xj}U_{yk}Q^x_{iljk} + \sum_j\sum_k\sum_l R_l U_{yj}U_{yk}Q^y_{iljk} =$$

$$= -\sum_l P_l D^y_{il} + \frac{1}{\mu_0}\sum_k\sum_j B_{xk}B_{yj}T^x_{ikj} - \frac{1}{\mu_0}\sum_k\sum_j B_{xk}B_{xj}T^y_{ikj} + g\sum_l R_l D_{il},\ i = \overline{1,n}.$$

Для системи (6)-(9) $\left(\rho' \equiv \tilde{\rho},\ p' \equiv \tilde{p}, v_x \equiv \tilde{u}_x, v_y \equiv \tilde{u}_y, b'_x \equiv \tilde{B}_x, b'_y \equiv \tilde{B}_y\right)$:

$$\sum_j D_{ji}\dot{R}_j - \sum_j T^x_{ji}(\rho_0)U_{xj} - \sum_j T^y_{ji}(\rho_0)U_{yj} = 0$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{P}_j + \sum_j\left((\gamma-1)T^x_{ij}(p_0) - T^x_{ji}(p_0)\right)U_{xj} + \sum_j\left((\gamma-1)T^y_{ij}(p_0) - T^y_{ji}(p_0)\right)U_{yj} = 0$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{B}_{xj} = \sum_j\left(T^y_{ij}(B_{o_y}) + T^x_{ij}(B_{o_X}) + T^x_{ji}(B_{o_X})\right)U_{xj} + \sum_j T^y_{ji}(B_{o_X})U_{yj}$$

$$\sum_j D_{ji}\dot{B}_{yj} = \sum_j T^x_{ji}(B_{oy})U_{xj} + \sum_j\left(T^x_{ij}(B_{o_X}) + T^y_{ij}(B_{o_y}) + T^y_{ji}(B_{o_y})\right)U_{yj}$$

$$\sum_j\left(\int_S N_jN_i\rho_0 dS\right)\dot{U}_{xj} = -\sum_j T^x_{ij}(1)P_j + \frac{1}{\mu_0}\sum_j T^y_{ij}(B_{o_y})B_{xj} +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\sum_j\left(T^x_{ji}(B_{oy}) - T^y_{ji}(B_{ox}) - T^y_{ij}(B_{o_X})\right)B_{yj}$$

$$\sum_j\left(\int_S N_jN_i\rho_0 dS\right)\dot{U}_{yj} = -\sum_j T^y_{ij}(1)P_j + \frac{1}{\mu_0}\sum_j T^x_{ij}(B_{o_X})B_{yj} +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\sum_j\left(T^y_{ji}(B_{ox}) - T^x_{ji}(B_{oy}) - T^x_{ij}(B_{o_y})\right)B_{xj} - \sum_j\left(\int_S N_jN_i g dS\right)R_j$$

Тут $D_{ji} = \int_S N_jN_i dS,\quad T^x_{ijk} = \int_S N_iN_j\frac{\partial(N_k)}{\partial x}dS,\quad T^y_{ijk} = \int_S N_iN_j\frac{\partial(N_k)}{\partial y}dS$

$$Q^x_{iljk} = \int_S N_iN_lN_j\frac{\partial N_k}{\partial x}dS,\ T^x_{ji}(f) = \int_S f\cdot N_j\frac{\partial(N_i)}{\partial x}dS,\ T^y_{ji}(f) = \int_S f\cdot N_j\frac{\partial(N_i)}{\partial y}dS$$

Як приклад застосування отриманих результатів було розглянуто задачу про поширення вихрових збурень у стратифікованому газі (дана задача є окремим випадком вище розглянутої).

Висновки

Підхід авторів до інтегрування системи МГД-рівнянь базується на методі скінченних елементів. У роботі не використовується консервативна форма запису системи, як у працях [1, 2, 3, 4], а в якості змінних інтегрування вибрані вихідні величини (густина, тиск, компоненти швидкості та магнітного поля).

Застосування скінченно-елементної апроксимації дозволило перейти від системи МГД-рівнянь до системи звичайних диференціальних рівнянь, нелінійної в загальному випадку. Дослідження показали, що отримані системи звичайних диференціальних рівнянь часто бувають жорсткі та нестійкі, тому для їх розв'язання використовується метод Гіра та модифікації схем високого порядку [6].

На основі розроблених алгоритмів створено програму для чисельного інтегрування системи МГД-рівнянь. Як приклад застосування отриманих результатів виконано розрахунок задачі про поширення вихрових збурень у стратифікованому газі.

Надалі планується розробка чисельних алгоритмів інтегрування тривимірних МГД-рівнянь з рівняннями руху у формі Нав'є-Стокса.

Література

1. *T.I. Gombosi et al.,* Solution Adaptive MHD for Space Plasmas: Sun-to-Earth Simulations. // *Computing in Science and Engineering*, vol. 6 (2), 2004. – P. 14-35.

2. *I. Sokolov et al.*, "Artificial Wind—A New Framework to Construct Simple and Efficient Upwind Shock-Capturing Schemes," *J. Computational Physics,* vol. 181, 2002. – P. 354–393.

3. *K.G. Powell et al.*, "A Solution-Adaptive Upwind Scheme for Ideal Magnetohydrodynamics." *J. Computational Physics.*, vol. 154 (2), 1999. – P. 284–309.

4. *Р. Рихтмайер, К.Мортон.* Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. – М.:Мир, 1972. – 418 с.

5. *P.L. Roe*, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *J. Computational Physics,* vol. 43, 1981. – P. 357–372.

6. *Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312 с.