УДК 62.50

К.т.н., доцент Россошинський Д.О., магістрант Нікітенко А.Г.

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНИХ ЗА ПАРАМЕТРАМИ МОДЕЛЕЙ ДИСКРЕТНИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В УМОВАХ КОРОТКИХ РЯДІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Вступ

Для побудови систем керування необхідно мати адекватну математичну модель керованого об'єкта. Побудова таких моделей зазвичай базується на використанні рядів спостережень вхідних та вихідних сигналів реального об'єкта для визначення структури та параметрів його моделі [1]. Відповідні методи моделювання, як надзвичайно важливі та актуальні, бурхливо розвиваються, адже вони дозволяють незалежно від природи самого об'єкта побудувати моделі будь-якого типу та для будь-яких об'єктів - від природних гідрологічних [2] до макроекономічних [3].

Методи оцінювання параметрів залежать від типу моделі. В літературі достатньо дослідженими вважаються методи оцінювання параметрів регресійних та динамічних лінійних моделей [4] при довгих рядах спостережень. Важливими тут є результати, що свідчать про статистичну «зміщеність» оцінок параметрів [1], а, отже, і про недостатню точність апроксимації характеристик динамки об'єкта.

Робота присвячена методам оцінювання параметрів широкого класу дискретних динамічних моделей – нелінійних моделей з лінійним входженням параметрів. Особлива увага приділена мало дослідженим методам оцінювання, придатним для рядів спостережень обмеженої довжини. Розглядається можливість використання уточнюючих процедур для зменшення «зміщеності» оцінок параметрів, що особливо важливо для нелінійних систем та у випадку коротких рядів спостережень, за яких вплив шумів значно посилюється.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження та покращення методу побудови дискретних динамічних моделей

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i(x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-s}; u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-p}), \quad k = 0,...N \qquad (1)$$

що лінійні за параметрами a_i. Це дозволяє застосовувати більш прості й ефективні методи оцінювання параметрів за результатами вимірів. Значення параметрів повинні бути наближені з використанням зашумлених значень $x_k^* = x_k + \xi_k$, $k = -s,...,N$ та виміряних значень контрольних змінних u_k^*, $k = -p,...,N$.

Методи побудови моделі дискретної динамічної системи

Для оцінювання параметрів моделі необхідно визначити міру еквівалентності системи і її моделі в сенсі деякого критерію помилки або функції втрат, або функціонала від виходу об'єкта й виходу моделі $J(Y, Y^*) = J(A)$, де A - вектор параметрів.

Умова екстремуму $J(A) \to \min$ може бути використана безпосередньо в аналітичній формі (проекційні методи оцінювання), або можуть бути створені умови для виконання співвідношення $\partial J / \partial A \to 0$ в процесі ітераційного процесу уточнення параметрів моделі (методи стохастичної апроксимації, градієнтні та інші [1]). При коротких рядах спостережень [6] найбільш природними виявляються, що базуються на сумарному урахуванні нев'язок у рівняннях динаміки.

Найпростішою ідеєю ідентифікації дискретних динамічних моделей є наступна: для реальних значень x_k рівняння (1) для кожного k є точними, але для значень x_k^*, що спостерігаються, між лівою та правою частинами (1) існуватиме деяка різниця

$$\Delta_{k+1} = x_{k+1}^* - \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i(x_k^*, x_{k-1}^*, ..., x_{k-s}^*; u_k^*, u_{k-1}^*, ..., u_{k-p}^*)$$

Мінімізуючи суму Δ_k^2 по k можна визначити параметри $\bar{a}_i$, $i = 1,...m$. Позначивши $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_m)$ можемо переписати рівняння наступним чином

$$\bar{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \mathbf{Y} \qquad (2)$$

де $\mathbf{Y} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_N^*)$,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} f_1(x_0^*, x_{-1}^*, ...x_{-s}^*; u_0^*, u_{-1}^*, ..., u_{-p}^*) & ... & f_n(x_0^*, x_{-1}^*, ...x_{-s}^*; u_0^*, u_{-1}^*, ..., u_{-p}^*) \\ f_1(x_1^*, x_{-0}^*, ...x_{-s+1}^*; u_1^*, u_0^*, ..., u_{-p+1}^*) & ... & f_n(x_1^*, x_{-0}^*, ...x_{-s+1}^*; u_1^*, u_0^*, ..., u_{-p+1}^*) \\ ... & ... & ... \\ f_1(x_{N-1}^*, x_{N-2}^*, ...x_{N-s}^*; u_{N-1}^*, u_{N-2}^*, ..., u_{N-p}^*) & ... & f_n(x_{N-1}^*, x_{N-2}^*, ...x_{N-s}^*; u_{N-1}^*, u_{N-2}^*, ..., u_{N-p}^*) \end{bmatrix}$$

Теоретично [1] наближені параметри $\bar{\mathbf{a}}$ матимуть ненульове асимптотичне зміщення навіть для найпростіших авторегресійних моделей і тому не є точними.

Модифікації методу найменших квадратів

Для покращення МНК може бути використана еквівалентна інтегральна форми рівнянь динаміки. Перетворюючи різницеву форму рівняння (1) можна отримати наступний вираз

$$\sum_{j=1}^{k} x_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=0}^{k-1} f_i(x_j, x_{j-1}, \ldots, x_{j-s}; u_j, u_{j-1}, \ldots, u_{j-p}) .$$

Аналогічно до МНК може бути збудована матриця нормальних рівнянь. Вводячи нижню трикутну матрицю $\mathbf{D}(N)$ розмірності $N \times N$ з одиничними елементами та позначаючи $\mathbf{U}(N) = \mathbf{D}(N) \cdot \mathbf{D}^T(N)$ отримаємо

$$\hat{\mathbf{a}} = \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}(N) \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{U}(N) \cdot \mathbf{Y} .$$

Для того, щоб отримати вихід моделі у момент k ми можемо використати інтегральну форму представлення рівняння динаміки з однією різницею: інтегрування можна проводити не з початкового стану, а з іншого момент, що передує x_k фіксованою кількістю L дискретних інтервалів [2]. Отже можемо позначити

$$x_k = x_{k-L} + \sum_{j=k-L}^{k-1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot f_i(x_j, x_{j-1}, \ldots, x_{j-s}; u_j, u_{j-1}, \ldots, u_{j-p}) - x_j \right)$$

Це призведе до змін у матриці $\mathbf{D}$: її виміри зміняться на $N \times N - L$, кожний стовпчик матиме L одиниць розміщених послідовно (інші елементи матимуть нульові значення).

Відмітемо, що обидві модифікації метода наближення мають, у порівнянні із (2), деяку вагову матрицю $\mathbf{U}(N)$ або $\mathbf{U}(N, L) = \mathbf{D}(N, L) \cdot \mathbf{D}^T(N, L)$.

Переваги модифікацій методу найменших квадратів

Для порівняння звичайного МНК і його модифікацій проводились чисельні експерименти на моделі $x_{k+1} = a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + b u_k$. Значення x_k, що спостерігалися, спотворювалися різним за рівнем незалежним рівномірно розподіленим шумом. Довжини часових рядів та «ковзаючих інтервалів» змінювалися. Встановлено, що помилка моделювання МНК накопичується до кінця часового ряду і навіть незначне зміщення параметрів призводить до невірної поведінки моделі на інтервалі. У той же час обидві модифікації зберігають адекватність поведінки моделі. Точність ідентифікації визначалася через значення середньоквадратичної похибки у різниці між справжніми та наближеними значеннями параметрів у серії із 1000 експериментів з різними реалізаціями шуму. Виявлено, що краща точність обох модифікацій МНК стабільна та не випадкова.

Експерименти показали, що інтегрування на «ковзаючому інтервалі» має деякі переваги, втім питання визначення оптимальної довжини такого інтервалу все ще відкрите. Наближення за допомогою «ковзаючіх інтервалів» різних довжин довело гіпотезу про існування стабільної його довжини, що забезпечує найкращу точність.

Застосування модифікацій МНК

Чисельні експерименти в роботі проводились на згенерованих рядах. Однак, виявлені переваги вказаних модифікацій МНК дають змогу говорити про можливість їх застосування для реальних задач побудови лінійних за параметрми моделей дискретних динамічних процесів, що зустрічаються практично у всіх галузях людської діяльності.

Висновки

Порівняно зі звичайним МНК його модифікації, що грунтуються на інтегральній формі представлення рівнянь динаміки, дозволяють отримувати більш точні оцінки параметрів. Модифікація МНК з інтегруванням на ковзаючому інтервалі має значні переваги над іншими методами. Завжди існує «ковзаючий інтервал» найкращої довжини, яка можливо дорівнює потроєній розмірності моделі. Його оптимальна довжина практично не залежить від рівня шуму та його реалізації.

Подальші дослідження можуть проводитись у напрямку обґрунтування вибору оптимальної довжини «ковзаючого інтервалу». Крім того, описані методи можуть використовуватись у якості початкових наближень для більш складних ітераційних процедур, що можуть забезпечити ще більшу точність.

Література

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояния. – М.: Мир, 1975. – 683 с.
2. *Дафф П., Халлам А., Уолтон Э.* Цикличность осадконакопления. - М.: Мир, 1971. - 284 с.
3. *Гренджер К., Хатанака М.* Спектральный анализ временных рядов в экономике. - М.: Статистика, 1972. – 167 с.
4. *Кендалл М.Дж., Стюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. . – М.: Наука, 1976. – 736 с.
5. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. - Киев: Техника, 1978. – 312 с.