УДК 62.50

К.т.н., доцент Россошинський Д.О., магістрант Висоцька Н.В.

Національний технічний університету України
«Київський політехнічний інститут»

ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ У РЯДАХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Вступ

Багато природних процесів мають циклічний характер, що викликано впливом ряду періодичних факторів геокосмічного походження. Моделі таких процесів є єдиним прийнятним джерелом інформації про стан подібних об'єктів, оскільки проведення експериментів на подібного роду об'єктах часто неможливе або неприпустиме з низки причин.

Розробка методів виявлення прихованих періодичностей проводилась у деяких роботах, для моделювання коливань температури повітря й опадів [1], змін гідрологічних і геологічних показників [2]. Загальні методи для побудови моделей циклічних процесів розроблялися й розвивалися протягом останніх десятиліть. Фундаментальні результати в цій галузі викладені в роботах загального напрямку [3], [4].

Доповідь присвячується розробці методів побудови полігармонійних моделей для виявлення прихованих періодичностей у процесах за результатами дискретних спостережень. Методи мають бути придатними для роботи в умовах коротких рядів вихідних даних і мати невелику обчислювальну складність, що надало б змогу використовувати їх для побудови частинних моделей у більш складних методах.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження методу і розробка його модифікацій для побудови моделей полігармонічного процесу

$$Y_k = \sum_{j=1}^{m} \left(A_j \cdot \sin\left(k \cdot \omega_j\right) + B_j \cos\left(k \cdot \omega_j\right) \right), \qquad (1)$$

де $k = 0,...,N$ - дискретний час, ω_j - частоти гармонік, A_j і B_j виражають амплітуди гармонійних складових для кожної з m гармонік.

При ідентифікації параметрів полігармонійної моделі використовуються виміряні значення $Y_k^* = Y_k + \xi_k$ (де ξ_k - шум), а ідея полягає у мінімізації наступного критерію

$$J(\omega_1,...,\omega_m,A_1,...,A_m,B_1,...,B_m)=\sum_{k=0}^{N}(Y_k^*-Y_k)^2 \qquad (2)$$

Методи побудови полігармонійних моделей

Пряме використання критерію (2) з моделлю (1) призводить до складної нелінійної оптимізаційної задачі, що в дійсності не може бути вирішена на практиці. Часто використовуються методи, засновані на переході в простір спектральних представлень [4]. Ці методи мають високу точність, однак потребують довгих часових рядів і мають високу складність. Також застосовуються селекційні перетворення і евристичні схеми, що забезпечують низьку точність і не є універсальними.

Існує три-кроковий метод, що розглядає задачу у постановці близькій до прямої (1,2). На першому кроці обчислюються m «балансових коефіцієнтів» $\bar{a}_p,\ p=0,...,m-1$ за МНК з наступного співвідношення

$$Y_{k+m}^*+Y_{k-m}^*\cong\sum_{p=0}^{m-1}\bar{a}_p\cdot(Y_{k+p}^*+Y_{k-p}^*),\qquad k=m,...,N-m \qquad (3)$$

Далі обчислені «балансові коефіцієнти» використовуються у рівності (4), що може бути зведена до «частотного поліному» (5)

$$\sum_{p=0}^{m-1}\bar{a}_p\cdot\cos(p\cdot\omega)=\cos(m\cdot\omega) \qquad (4)$$

$$P_m\cdot\cos^m\omega+P_{m-1}\cdot\cos^{m-1}\omega+...+P_1\cdot\cos\omega+P_0=0 \qquad (5)$$

який має m різних дійсних коренів для визначення частот моделі. На третьому кроці визначаються амплітуди гармонійних складових із співвідношення (6) з відомими значеннями частот.

$$Y_k^*\cong\sum_{j=1}^{m}\bar{A}_j\cdot\sin(k\cdot\bar{\omega}_j)+\bar{B}_j\cdot\cos(k\cdot\bar{\omega}_j),\quad k=0,...,N \qquad (6)$$

Описаний метод призводить до абсолютно точного відновлення параметрів полігармонійної моделі, за умови точних даних [5]. За наявності шумів обчислені «балансові коефіцієнти» мають значення, що не відповідають правильним частотам. Ці відхилення відображуються на зміщенні оцінок параметрів моделі відносно реальних значень. У зв’язку з цим, ключовим місцем для покращення точності методу є етап обчислення «балансових коефіцієнтів».

Модифікації процедури обчислення «балансових коефіцієнтів»

Інтерпретуючи співвідношення (2) як регресійну рівність, можна помітити, що і результуючі величини і аргументи впливають шуми. Таким чином ми маємо випадок, для якого призначений метод ортогональної регресії [6].

Зауважимо, що метод ортогональної регресії вимагає обчислювальних затрат, так як він потребує визначення найменшого власного числа і відповідного йому власного вектора матриці нормальних рівнянь. Тому цей метод може бути рекомендований лише в тому випадку, якщо будуть виявлені його значні переваги у стійкості до шумів при обчисленні «балансових коефіцієнтів».

Розглядаючи «балансове співвідношення» як дискретну динамічну систему, шляхом перетворень можна отримати форму (7), що дозволяє застосування ідеї інтегрування на «ковзному інтервалі».

$$\sum_{i=k-L}^{k}\left(Y_{i+m}^{*}+Y_{i-m}^{*}\right)\cong\sum_{p=0}^{m-1}\overline{a}_{p}\cdot\sum_{i=k-L}^{k}(Y_{i+p}^{*}+Y_{i-p}^{*}) \tag{7}$$

Для шумів із нульовим математичним очікуванням операції сум у лівій та правій частинах рівності мають призвести до зменшення впливу шумів на величини «балансових коефіцієнтів».

Переваги модифікацій методу найменших квадратів

Для порівняння точності базового методу і його запропонованих модифікацій були проведені чисельні експерименти. Часові ряди для розрахунків були згенеровані за моделлю (1) з незалежним рівномірно розподіленим шумом. Рівень шуму змінювався від 0 до 10% від чистого значення полігармонійного сигналу. Експерименти проводились для одної и двох гармонік з «швидкими» і «повільними» частотами.

Для визначення середньої різниці між наближеним і реальним значеннями частот $\Delta\omega_j=\overline{\omega}_j-\omega_j$ процедура оцінювання частот проводилась багаторазово для однієї моделі з різними реалізаціями шуму. Обчислювалась середньоквадратична помилка значень частот у серії з 1000 експериментів. Довжина «ковзного інтервалу» була прийнята рівною чотирьом.

Виявилось, що у випадку низького рівня шумів МНК і метод ортогональної регресії дають дуже близькі результати, в той час як інтегрування на «ковзному інтервалі» веде до більш точних оцінок частот. Дослідження середньоквадратичної помилки у серії експериментів дає змогу говорити про невипадковість отриманих результатів

Застосування методу «балансових співвідношень»

Чисельні експерименти в роботі проводились на згенерованих рядах.

Однак, приведена у роботі три-крокова схема успішно використовується на практиці, тому процедури, що дають змогу підвищити точність оцінок параметрів можуть знайти своє місце у всіх сферах застосування методу.

Невисока складність уточнюючої процедури дозволяє говорити про можливість її застосування при побудові частинних моделей у методах групового моделювання аргументів, що є великою перевагою такої схеми.

Висновки

Модифікації базового методу мають деякі переваги у точності. Зокрема, метод ортогональної регресії призводить до дещо кращих результатів для «повільних» гармонік, довгих часових рядів і у випадках великих шумів, а метод, що базується на інтегруванні на «ковзному інтервалі» демонструє значно кращу точність у всіх випадках. Таким чином, можна сказати, що обчислювальна складність методу ортогональної регресії робить незначними його переваги, зважаючи на те, що простіший метод інтегрування на «ковзному інтервалі» має меншу чутливість до шуму.

Подальші дослідження можуть проводитись у напрямку побудови ітераційних процедур, що діють на основі ідеї «балансове співвідношення» і можуть забезпечити подальше підвищення точності. Іншим напрямком може бути робота, спрямована на подолання обмеженості методу, що дозволяє лише гармонійні складові у моделі.

Література

1. *Дафф П., Халлам А., Уолтон Э.* Цикличность осадконакопления. – М.: Мир, 1971. – 284 с.

2. *Ивахненко А.Г., Ивахненко М.А., Кошулько А.И.* Индуктивные методы самоорганизации моделей на ЭВМ и сплайны в гидрогеологических исследованиях // Водные ресурсы. – 1985. – № 4. – С. 76-85.

3. *Ивахненко А. Г., Юрачковский Ю. Г.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. - М.: Радио и связь, 1987. − 120 с.

4. *Серебренников М.Г., Первозванский А.А.* Выявление скрытых периодичностей. - М.: Наука, Физматгиз, 1965. – 244 с.

5. *Кошулько А.А., Кошулько А.И.* Тестирование полигармонического алгоритма МГУА // Управляющие системы и машины. – 2003. – №2. – С. 87-92.

6. *Крамер Г.* Математические методы статистики – М.: Мир, 1975. – 648 с.