УДК 536.12

Магістрант Аралова А.А., ст. викладач Мальчиков В.В.

Національний технічний університету України «Київський політехнічний інститут»

ЧИСЕЛЬНА ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ БАГАТОКОМПОНЕНТНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ОПИСУЄТЬСЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Вступ

Сучасні розробки в галузях машино-, автомобіле- та авіабудуванні потребують міцних, легких та відносно дешевих матеріалів. Саме на основі цієї потреби виникли композитні матеріали, що використовуються в різних виробництвах починаючи від важкої промисловості та закінчуючи точним машинобудування, де використовуються як покриття і як складові компоненти. Найбільш поширеними задачами, з якими доводиться зустрічатися інженерам та конструкторам у вищезгаданих галузях, є задачі теплообміну. Особливо складними для опису і аналізу є процеси, що протікають в композитних матеріалах. Моделювання процесів, що протікають в композитних матеріалах зацікавили і продовжують цікавити математиків, фізиків, фахівців з проектування. Зокрема даній тематиці присвячені праці низки авторів (Аліфанов О.В, Дейнека В.С.).

Постановка задачі

Зазвичай ми не можемо визначити яким чином відбувається розподіл тепла в композитному матеріалі. Саме чисельна ідентифікації дозволяє встановити функції розподілу температур в матеріалі. Метою даної роботи є розробка алгоритму чисельної ідентифікації параметрів багатокомпонентної системи.

Структурна та параметрична ідентифікація параметрів

Структурна та параметрична ідентифікації параметрів фізичних процесів тісно пов’язані з розв’язуванням обернених задач, частіше за все це обернені задачі для диференціальних рівнянь. Постановка задачі теплообміну між твердим тілом чи деякою системою та оточуючим середовищем розглядається з точки зору відношення причина-наслідок. При цьому до причинних характеристик процесу теплообміну в тілі (системі) відповідно до прийнятої моделі віднесемо граничні умови та їх параметри, початкові умови, теплофізичні властивості, внутрішні джерела тепла та провідності, а також геометричні характеристики тіла чи системи. Тоді наслідком буде той чи інший тепловий стан, що визначається температурним полем досліджуваного об’єкта [1]. Встановлення причинно-наслідкових зв’язків є метою прямої задачі теплообміну. Навпаки, якщо за відповідною інформацією про температурне поле необхідно відтворити причинні характеристики, то маємо ту чи іншу постановку оберненої задачі теплообміну [1]. Постановка оберненої задачі, на відмінну від прямої, не відповідає фізичній реалізації подій. Очевидно, що при математичній формалізації вона має прояв як математична некоректність (найчастіше нестійкість розв’язку), і обернені задачі є типовим прикладом некоректно поставлених задач в теорії теплообміну.

Вибір методів та підходів

Некоректні задачі є особливим окремим класом, що перевищує за обсягом клас коректних задач. Це пов’язано з тим , що під коректними задачами розуміють задачі, що мають розв’язок – єдиний та стійкий. Відповідно, якщо розв’язок задачі не задовольняє хоча б одну з вищеперелічених умов, то задача є некоректною. Практичний розв’язок некоректно поставлених задач теплообміну завжди супроводжується їх переходом до скінченномірних аналогів. Таке перетворення здійснюється за рахунок аппроксимації операторів рівнянь, що описують дану систему та крайові умови, введення параметризації різних функцій та інших операцій. Перехід до скінченномірної постановки некоректної задачі звужує область її можливих наближених розв’язків [2]. В обернених задачах теплообміну область можливих рішень визначається низкою факторів, що характеризують умови проведення експерименту, формування додаткових умов з використанням відповідних вимірів. Розв’язок оберненої задачі полягає у відновленні невідомих характеристик досліджуваного процесу за результатами вимірів деяких функціоналів від змінних станів. Обернену задачу можна розглядати як деякий експеримент, кінцевою метою якого є чисельна інформація про невідомі характеристики. При цьому для підвищення достовірності та точності кінцевих результатів можуть бути використані методи математичної оптимізації [3].

Розв’язання поставленої задачі

Математична постановка оберненої задачі поєднує в собі дві частини: модель досліджуваного процесу та модель формування за допомогою вимірювального приладу додаткової інформації про функції стану. Модель стану для процесу нестаціонарного теплообміну зазвичай має вигляд [1]:

$$L[u] = S(x,\tau,T), x \in \Omega, \tau \in (0,\tau_m] \quad (1)$$

$$T(x,0) = T_0(x), x \in \Omega \quad (2)$$

$$B[u] = g(\tau), x \in \partial\Omega, \tau \in (0, \tau_m] \quad (3)$$

де L – нелінійний оператор параболічного типу другого порядку, B – оператор граничних умов, T – температура, u – вектор невідомих характеристик теплової системи. Модель станів процесу (1) – (3) є неявною залежністю температури T, як функції теплового стану, від просторової зміни x, часу τ, вектора невідомих характеристик u, а також вектора величин, що характеризують умови проведення теплофізичного експерименту. До останніх належать: геометричні параметри просторової області Ω, час проведення експерименту τ_m, зовнішні впливи, наприклад, джерело з потужністю S(x, τ, T) в рівнянні (1), початковий розподіл температури $T_0(x)$, характеристика g(τ) в умові (3) чи будь-яка інша їх комбінація. Представимо всю сукупність умов у вигляді вектора [1]

$$W = [\Omega, \tau_m, S(x, \tau, T), T_0(x), g(T)] \quad (4)$$

Залежно від типу задачі, деякі з перелічених факторів можуть бути відсутні. Модель станів дозволяє прогнозувати тепловий стан досліджуваної системи при фіксованому наближенні вектора шуканих характеристик та при заданому векторі умов (4) [1]. Іншими словами, модель станів визначає перетворення простору шуканих характеристик в простір функцій стану:

$$A(W) = T(x, \tau, u, W) \quad (5)$$

де A в загальному випадку нелінійний оператор, що виник на основі крайової задачі (1) – (3) та залежить від умов проведення експерименту.

Нехай функція f є результатом реальних вимірів. З цього випливає, що вона завжди містить похибки. Загальна похибка є сумою систематичної та випадкової похибки. Загальний аналіз окремих складових похибки є окремою складною задачею. Відзначимо лише, що сучасні методи вимірювання дають доволі низький рівень систематичних похибок. Також часто є можливість оцінити систематичну складову похибки. Тому будемо розглядати лише випадкову складову [1]. Тобто:

$$f_\delta(x, \tau) = f(x, \tau) + \tilde{f}(x, \tau) \quad (6)$$

де f_δ(x, τ) – точне значення вимірюваної величини, $\tilde{f}(x, \tau)$ - випадкова функція.

Практичне застосування отриманих результатів

Математична постановка оберненої задачі базується на припущенні, що модель стану (5) досить точно описує досліджуваний процес та структура оператора A заздалегідь відома. Дане припущення дозволяє об'єднати модель станів та модель вимірів та розглядати обернену задачу у вигляді рівняння в операторній формі.

$$Au = f_\delta, u \in U, f \in F, A: U \to F \quad (7)$$

де простір F визначається схемою вимірів, що використовується. Обернена задача (7) є некоректно поставленою. Для її наближеного розв’язку необхідно використовувати спеціальні методи. Для знаходження наближеного розв’язку оберненої задачі будується функція мінімізації нев’язки

$$J = \frac{1}{2}\|Au - f_\delta\|_F^2 \quad (8)$$

послідовністю

$$u_{n+1} = R_A(u_n) \quad (9)$$

де n – номер ітерації, R_A – алгоритм обчислення наближеного розв’язку. Область можливих розв’язків визначається умовою:

$$u : \frac{1}{2}\|Au - f_\delta\|_F^2 \le \delta^2 \quad (10)$$

де δ - похибка правої частини рівняння (7), обчислена в метриці простору F. Ітераційний процес зупиняється за критерієм нев’язки

$$\frac{1}{2}\|Au - f_\delta\|_F^2 \approx \delta^2 \quad (11)$$

тобто за наближений розв’язок задачі береться елемент $\tilde{u}$ на межі області розв’язків. При цьому розміри та форма цієї області характеризують такі важливі обчислювальні властивості алгоритму (9) - (11), як точність, кількість ітерацій, необхідних для виходу фукціоналу (8) на рівень нев’язки та ряд інших.

Вищенаведений алгоритм реалізовано та протестовано за допомогою системи програмування Delphi з метою подальшого застосування в розробках Інституту кібернетики НАН України.

Висновки

Запропонована модель параметричної ідентифікації параметрів багатокомпонентної системи дозволяє досліджувати процеси, що протікають в композитних матеріалах, та описуються некоректними задачами теплообміну. На основі даної моделі можна побудувати алгоритм для чисельної ідентифікації параметрів. У перспективі – подальша розробка алгоритму ідентифікації параметрів на більш широкому класі задач.

Література

1. *Алифанов О.В., Артюхин Е.А., Румянцев* С.Я. Экспериментальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
2. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методов регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, №3. – С. 501-504.
3. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Дкл. АН СССР. – 1963. – Т. 153, №1. – С. 49-52.
4. *Дейнека В.С Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных середах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.